

# Ein gradientenabhängiges Modell für anisotrope Schädigung von Beton unter Berücksichtigung von Porendruck

Von der Fakultät

Architektur, Bauingenieurwesen und Umweltwissenschaften  
der Technischen Universität Carolo-Wilhelmina zu Braunschweig  
zur Erlangung des Grades eines Doktor-Ingenieurs (Dr.-Ing.)  
genehmigte Dissertation

von

**Dipl.-Ing. Mark Bernd Beckmann**

aus Rheine

Eingereicht am

11. März 2008

Mündliche Prüfung am

8. Januar 2009

Berichterstatter

Prof. Dr.-Ing. Dieter Dinkler

Prof. Dr.-Ing. Stefanie Reese

Braunschweig 2009

ISBN 978-3-926031-05-1

Herausgeber: Prof. Dr.-Ing. Dieter Dinkler

© Institut für Statik, Technische Universität Braunschweig, 2009

## **Kurzfassung**

Das vorgestellte Materialmodell ermöglicht die Beschreibung des Verformungsverhaltens von Beton unter äußerer Belastung und Porendruck. Dabei sind irreversible Verformungen des Materials ebenso wie der Steifigkeitsabfall infolge von Rissbildung und -wachstum berücksichtigt. Mit Hilfe eines mikromechanischen Modells erfolgt zunächst eine systematische Untersuchung der Auswirkungen von Rissbildung und -wachstum auf das Verformungsverhalten. Die Ergebnisse der mikromechanischen Analyse fließen in ein makromechanisches Modell ein, das zur Strukturanalyse dient und im Rahmen einer erweiterten Kontinuumstheorie formuliert ist. Grundlage der Erweiterung bildet eine implizite Gradientenformulierung. Somit ist auch bei entfestigendem Materialverhalten die Unabhängigkeit der Lösung von der Diskretisierung gewährleistet. Ausgewählte Strukturbeispiele zeigen die Leistungsfähigkeit des entwickelten Materialmodells.

## **Abstract**

A material model for concrete is presented, which allows to describe the deformation behaviour due to external loads and pore pressure. Pore pressure can occur in microstructure as a result of phase transformations caused by environmental exposures like vaporisation of water during fire and delayed ettringite formation during sulfate attack. The proposed material model takes into account irreversible deformations as well as stiffness degradation due to crack initiation and growth. The influence of the resulting anisotropic damage on the deformation behaviour is systematically investigated by means of a micromechanical model. The results of the micromechanical investigations provide the basis for a macromechanical model, which is formulated in the framework of an extended continuum theory. The applied theory bases on an implicit gradient formulation to ensure that the numerical results are also independent of the discretisation in case of softening. Numerical analysis of selected structures demonstrates the efficiency of the proposed material model.





# Inhalt

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1	Motivation . . . . .	1
1.2	Zielsetzung . . . . .	2
<b>2</b>	<b>Struktur, Verhalten und Schadensursachen von Beton</b>	<b>3</b>
2.1	Struktur und Eigenschaften . . . . .	3
2.2	Mechanisches Verhalten . . . . .	6
2.2.1	Einaxiale Druckbeanspruchung . . . . .	7
2.2.2	Einaxiale Zugbeanspruchung . . . . .	9
2.2.3	Biaxiale Beanspruchung . . . . .	11
2.3	Schadensursachen bei innerer Beanspruchung . . . . .	12
2.3.1	Lösende und treibende Angriffe . . . . .	13
2.3.2	Sulfattreiben . . . . .	13
<b>3</b>	<b>Grundlagen der Materialmodellierung</b>	<b>17</b>
3.1	Klassifizierung von Materialmodellen . . . . .	17
3.2	Grundlagen der Kontinuumsmechanik . . . . .	18
3.2.1	Kinematik . . . . .	18
3.2.2	Bilanzgleichungen . . . . .	19
3.3	Grundlagen der Thermodynamik . . . . .	20
3.3.1	Der 1. Hauptsatz der Thermodynamik . . . . .	21
3.3.2	Der 2. Hauptsatz der Thermodynamik . . . . .	21
3.3.3	Thermodynamische Potentiale . . . . .	22
3.3.4	Folgerungen aus den Hauptsätzen der Thermodynamik . . . . .	23
3.3.5	Dissipationspotential . . . . .	24
3.4	Klassifizierung von zeitunabhängigem Materialverhalten . . . . .	24
3.5	Modellierung elastischen Materialverhaltens . . . . .	25
3.6	Modellierung inelastischen Materialverhaltens . . . . .	26
3.6.1	Materialgleichungen . . . . .	27
3.6.2	Verfestigungshypothesen . . . . .	29
3.6.3	Festigkeitshypothesen . . . . .	31
3.6.4	Mehrflächenplastizität . . . . .	32
3.6.5	Postulat von Drucker . . . . .	33
3.6.6	Prinzip der maximalen Dissipation . . . . .	34
3.7	Modellierung von Schädigung . . . . .	35
3.7.1	Konzept der effektiven Spannungen . . . . .	36

3.7.2	Prinzip der Dehnungsäquivalenz . . . . .	37
3.7.3	Prinzip der Energieäquivalenz . . . . .	38
3.7.4	Materialgleichungen . . . . .	39
3.8	Kopplung von inelastischem Materialverhalten und Schädigung . . . .	41
3.9	Modellierung von Rissen . . . . .	42
<b>4</b>	<b>Lokalisierung</b>	<b>45</b>
4.1	Einführung . . . . .	45
4.2	Versagenskriterien . . . . .	47
4.2.1	Verlust der Eindeutigkeit . . . . .	47
4.2.2	Verlust der Stabilität . . . . .	48
4.2.3	Verlust der Elliptizität . . . . .	49
4.3	Regularisierungsstrategien . . . . .	50
4.3.1	Rissbandmodell . . . . .	50
4.3.2	Berücksichtigung viskosen Materialverhaltens . . . . .	51
4.3.3	Verzerrungsgradientenmodelle . . . . .	52
4.3.4	Mikropolare Kontinua . . . . .	53
4.3.5	Nichtlokale Integralmodelle . . . . .	54
4.3.6	Explizite Gradientenmodelle . . . . .	55
4.3.7	Implizite Gradientenmodelle . . . . .	55
<b>5</b>	<b>Mikromechanisches Modell</b>	<b>57</b>
5.1	Grundlagen der Mikromechanik . . . . .	57
5.1.1	Repräsentatives Volumenelement . . . . .	58
5.1.2	Homogenisierung . . . . .	59
5.1.3	Randbedingungen . . . . .	60
5.1.4	Isotropisierung . . . . .	62
5.2	Modellbildung . . . . .	65
5.3	Bestimmung effektiver Materialeigenschaften . . . . .	68
5.4	Ergebnisse der mikromechanischen Untersuchung . . . . .	74
5.4.1	Einfluss der Pore auf die Materialeigenschaften . . . . .	74
5.4.2	Einfluss des Risses auf die Materialeigenschaften . . . . .	78
<b>6</b>	<b>Makromechanisches Modell</b>	<b>83</b>
6.1	Lokales Modell . . . . .	83
6.1.1	Fließbedingungen . . . . .	83
6.1.2	Schädigungseffektntensor . . . . .	85
6.1.3	Materialgleichungen . . . . .	89
6.2	Nichtlokales Modell . . . . .	91
6.3	Berücksichtigung von Porendruck . . . . .	92

<b>7</b>	<b>Numerische Formulierung</b>	<b>97</b>
7.1	Materialgleichungen in Ratenform . . . . .	97
7.2	Integration der Materialgleichungen . . . . .	99
7.3	Schwache Form der Randwertaufgabe . . . . .	100
7.3.1	Diskretisierung . . . . .	102
7.3.2	Linearisierung . . . . .	105
7.4	Lösungsalgorithmus . . . . .	108
<b>8</b>	<b>Strukturanalysen</b>	<b>111</b>
8.1	Stab unter Zugbeanspruchung . . . . .	111
8.2	Stab unter Druckbeanspruchung . . . . .	113
8.3	Direkter Zugversuch . . . . .	115
8.4	L-förmige Scheibe . . . . .	120
8.5	Vier-Punkt-Biegeversuch . . . . .	124
8.6	Stützenquerschnitt unter innerer Beanspruchung . . . . .	129
8.7	Wandquerschnitt unter innerer Beanspruchung . . . . .	131
<b>9</b>	<b>Zusammenfassung</b>	<b>135</b>
	<b>Literatur</b>	<b>137</b>



# Nomenklatur

## Allgemein

$d$	: Differential
$\partial$	: partielle Ableitung
$(\dot{\phantom{x}})$	: Zeitableitung
$(\widetilde{\phantom{x}})$	: effektive Größe
$(\bar{\phantom{x}})$	: nichtlokale Größe
$(\hat{\phantom{x}})$	: vorgegebene Größe
$\cdot$	: Skalarprodukt
$:$	: doppeltes Skalarprodukt
$\otimes$	: dyadisches Produkt
$\Omega$	: Gebiet
$\partial\Omega$	: Rand des Gebiets
$\Delta$	: Inkrement

## Skalare

$t$	: Zeit
$\rho$	: Dichte
$V$	: Volumen
$\Phi$	: Dissipation
$\varphi$	: Dissipationspotential
$\psi$	: spezifische freie Energie
$g$	: Gibbs-Energie
$F$	: Fließbedingung
$\lambda$	: plastischer Multiplikator
$\sigma_F$	: Fließspannung
$\sigma_V$	: Vergleichsspannung
$\varepsilon_V$	: Vergleichsverzerrung
$\sigma_P$	: bezogener Porendruck
$\varepsilon_{PV}$	: volumetrische Verzerrung der Pore
$\alpha_C$	: Risswinkel
$\kappa_C$	: bezogene Risslänge
$\rho_E$	: Volumenanteil des Ettringits
$D$	: Schädigungsvariable
$\eta, \zeta$	: innere Variablen
$I_i$	: i-te Hauptinvariante
$J_i$	: i-te Grundinvariante

## Tensoren höherer Stufe

$I^i$	: Einheitstensor i-ter Stufe
$\nabla$	: Nabla-Operator
$x$	: Ortsvektor
$n$	: Normalenvektor
$u$	: Verschiebungsvektor
$b$	: Volumenkraft
$t$	: Oberflächenkraft
$\sigma$	: Spannungstensor
$\varepsilon$	: linearisierter Verzerrungstensor
$C$	: Elastizitätstensor
$F$	: Nachgiebigkeitstensor
$D$	: Schädigungstensor
$M$	: Schädigungseffektstensor
$Q, R$	: Rotationstensoren

## Modellparameter

$\rho_P$	: Porosität
$l$	: interne Länge
$\nu$	: Querdehnzahl
$E$	: Elastizitätsmodul
$H$	: Verfestigungsmodul
$\sigma_{FR0}, \sigma_{FD0}$	: Anfangsfließspannungen
$a_{(..)}, f_{(..)}$	: weitere Modellparameter

## Kopfzeiger

$el$	: elastischer Anteil
$pl$	: inelastischer Anteil
$*$	: Größe auf Mikroebene
$T$	: Transposition

## Fußzeiger

$R$	: Rankine-Kriterium
$D$	: Drucker-Prager-Kriterium

Abweichende Definitionen sowie nicht aufgeführte Größen sind im Text erläutert.

# 1 Einleitung

Neben der zu gewährleistenden Sicherheit von Bauwerken ist eine optimale Ausnutzung von Struktur und Material in ökonomischer und ökologischer Hinsicht erstrebenswert. Numerische Simulationen sind für eine effiziente Auslegung von Bauteilen und zur Beurteilung der Sicherheit von Bauwerken, d. h. der Gewährleistung ihrer Tragfähigkeit und Funktionstüchtigkeit, unverzichtbar. Dies beinhaltet z. B. bei Stahlbetonbauwerken das Einschätzen von Risiken, die aus Rissbildung und -wachstum resultieren. Beim Auftreten von Rissen ist u. a. die Frage nach der Traglast und der Art des Versagens für die Beurteilung der Sicherheit von großer Bedeutung. Zur Bestimmung der Traglast und Resttragfähigkeit einer Struktur sind hochgenaue Materialmodelle erforderlich, welche das komplexe Materialverhalten wirklichkeitsnah beschreiben.

## 1.1 Motivation

Stahlbetonbauwerke sind während ihrer Nutzungsdauer äußeren Belastungen und Umwelteinwirkungen ausgesetzt. Beide Beanspruchungen können Veränderungen der Materialstruktur bewirken und somit die Sicherheit eines Bauwerks gefährden. Zu den Umwelteinwirkungen, die aufgrund chemischer Reaktionen im Betongefüge zu einer Schwächung der Materialstruktur führen können, gehören Belastungen durch Säure und Sulfat. Ferner können im Inneren des Betons ablaufende physikalische Prozesse wie das Gefrieren von Wasser bei Frosteinwirkung das Material schädigen. Die Schädigungsmechanismen bei chemischen und physikalischen Umwelteinwirkungen sind weitgehend bekannt. Dennoch sind zuverlässige Prognosen zur Lebensdauer von Stahlbetonbauwerken aufgrund der Vielzahl von Wechselwirkungen, die infolge der unterschiedlichen Beanspruchung des Materials auftreten, und der damit verbundenen Veränderungen der Materialstruktur bis heute nicht möglich. Allerdings wurden in den letzten Jahren erfolgversprechende Konzepte zur numerischen Simulation umweltbedingter Schädigungsprozesse unter Berücksichtigung ausgewählter Wechselwirkungen im Rahmen der Kontinuumsmechanik entwickelt [5, 48, 84, 142]. Dabei erfordert die numerische Simulation umweltbedingter Schädigungsprozesse neben einem Transport- und Reaktionsmodell auch ein geeignetes Materialmodell, welches die Auswirkungen der im Betongefüge stattfindenden Prozesse auf das Materialverhalten erfasst.

## 1.2 Zielsetzung

Ziel dieser Arbeit ist die Entwicklung eines Materialmodells für Beton, welches das Verformungsverhalten bei äußeren Belastungen und bei inneren Beanspruchungen in Form von treibenden Angriffen beschreibt. Zu den treibenden Angriffen zählen die bei Brandeinwirkung im Porenraum entstehenden Dampfdrücke und das Sulfattreiben. Beim Sulfattreiben bewirken chemische Reaktionen im Betongefüge Phasenneubildungen, deren expansive Wirkung zum Aufbau innerer Drücke führt. Wechselwirkungen zwischen diesen im Porenraum entstehenden Drücken und der äußeren Belastung werden im Modell ebenso berücksichtigt wie der Steifigkeitsabfall infolge von Rissbildung und -wachstum sowie die damit einhergehenden irreversiblen Verformungen. Dabei bedingen Rissbildung und -wachstum eine anisotrope Schädigung des Materials. Messtechnisch ist die Bestimmung der Auswirkungen anisotroper Schädigung auf das Verformungsverhalten sehr aufwendig. Deshalb werden diese mittels eines mikromechanischen Modells an einer vereinfachten Materialstruktur systematisch untersucht. Hierzu wird die idealisierte Materialstruktur zunächst in einem repräsentativen Volumenelement (RVE) abgebildet. Aus der Homogenisierung der idealisierten Materialstruktur resultieren dann die für das makromechanische Modell benötigten Materialkennwerte. Eine detaillierte Auflösung der Materialstruktur im RVE ist zwar möglich, erfordert jedoch eine stochastische Beschreibung. Eine solche Vorgehensweise schränkt allerdings die allgemeine Anwendbarkeit des makromechanischen Modells stark ein und wird hier deshalb nicht weiter verfolgt.

Die Modellierung des Materials erfolgt auf Makroebene verschmiert mittels eines Kontinuumsmodells, das in numerischer Hinsicht für Strukturanalysen besser geeignet ist als ein diskretes Modell. Grundlage des makromechanischen Modells bildet die Plastizitätstheorie, wobei eine Fließbedingung nach Drucker-Prager den Materialzustand unter Druckbeanspruchung und eine auf dem Rankine-Kriterium basierende Fließbedingung den Materialzustand unter Zugbeanspruchung charakterisiert. Die Fließbedingungen sind mit effektiven Spannungen formuliert, um den Einfluss von Porendruck und Schädigung auf das Verformungsverhalten berücksichtigen zu können.

Die mit der Schädigung einhergehende Entfestigung des Materials führt bei klassischen Kontinuumsmodellen zu diskretisierungsabhängigen Lösungen, so dass eine Regularisierung der Modellgleichungen erforderlich ist. Für die Regularisierung wird hier eine erweiterte Kontinuumstheorie verwendet, bei der das Prinzip der lokalen Wirkung, auf dem klassische Kontinuumsmodelle basieren, nicht gilt. Der verwendeten Kontinuumstheorie liegt eine implizite Gradientenformulierung zugrunde, so dass gegenüber klassischen Kontinuumsmodellen zusätzliche Modellgleichungen zu berücksichtigen sind. Die numerische Formulierung der daraus resultierenden Mehrfeldaufgabe erfolgt im Rahmen der Finite-Element-Methode mittels einer Weggrößenformulierung.



## 2 Struktur, Verhalten und Schadensursachen von Beton

Neben Struktur und Eigenschaften erhärteten normalfesten Betons wird dessen mechanisches Verhalten unter monotoner Beanspruchung erläutert. Abschließend folgt ein Überblick über Schadensursachen bei innerer Beanspruchung des Materials.

### 2.1 Struktur und Eigenschaften

Beton ist ein Werkstoff, der aus Gesteinskörnung, Zement und Wasser besteht. Zur Beeinflussung bestimmter Materialeigenschaften können ferner Zusätze, wie Silicastaub oder Luftporenbildner, dem Beton beigemischt werden. Seine Eigenschaften im erhärteten Zustand bestimmen im Wesentlichen der Zementstein und die Gesteinskörnung sowie der Verbund beider Phasen, weshalb Beton häufig als Zweiphasensystem aufgefasst wird.

Der Zementstein entsteht aus der Reaktion des Zements mit Wasser, der Hydratation, und ist von einem System feiner Poren durchzogen, welches die mechanischen Eigenschaften, die Dichtigkeit und die Dauerhaftigkeit des Betons maßgeblich beeinflusst [123]. Dabei bilden die Hydratationsprodukte zunächst ein poröses Gel, das im Wesentlichen aus Calciumsilikat-Hydratverbindungen, kurz C-S-H Phasen, Calciumaluminathydraten, Calciumferrithydraten sowie Calciumhydroxid besteht. Erst nach Aushärten des porösen Zementgels entsteht der Zementstein, der neben den Hydratationsprodukten noch unhydratisierte Zementpartikel enthalten kann. Das Spektrum der Porengrößen im Zementstein umfasst mehrere Zehnerpotenzen, wobei je nach Größe und Art der Entstehung zwischen Gel-, Kapillar-, Luft-, und Verdichtungsporen zu unterscheiden ist.

Die Gelporen nehmen etwa 25 % des Zementgelvolumens ein und sind durch beton-technologische Maßnahmen kaum zu verändern [123]. Dagegen hängt der Anteil der um Zehnerpotenzen größeren Kapillarporen wesentlich vom Wasserzementwert und dem Hydratationsgrad ab. Der Wasserzementwert gibt das Verhältnis von Wasser zu Zement, der Hydratationsgrad den Gewichts- oder Volumenanteil des bereits reagierten Zements an. Die Kapillarporen sind von großer Bedeutung für die Eigenschaften des Zementsteins. Sie beeinflussen Druckfestigkeit, elastische Verformungen sowie Kriechverformungen und bestimmen maßgeblich die Durchlässigkeit des Zementsteins und

damit auch des Betons. Die mit Hilfe von Luftporenbildner dem Beton künstlich zugeführten Luftporen dienen zur Erhöhung der Frost- und Frosttausalzbeständigkeit. Die wiederum größeren Verdichtungsporen entstehen beim Mischen des Betons und können trotz nachfolgender Verdichtung nicht vollständig beseitigt werden. Ihr Gehalt beträgt bei gut verdichtetem Beton 1 - 2 Volumen-%. Die Gesamtporosität von Beton hingegen liegt je nach Zusammensetzung und Prüfmethode zwischen 8 und 15 Volumen-% [106].

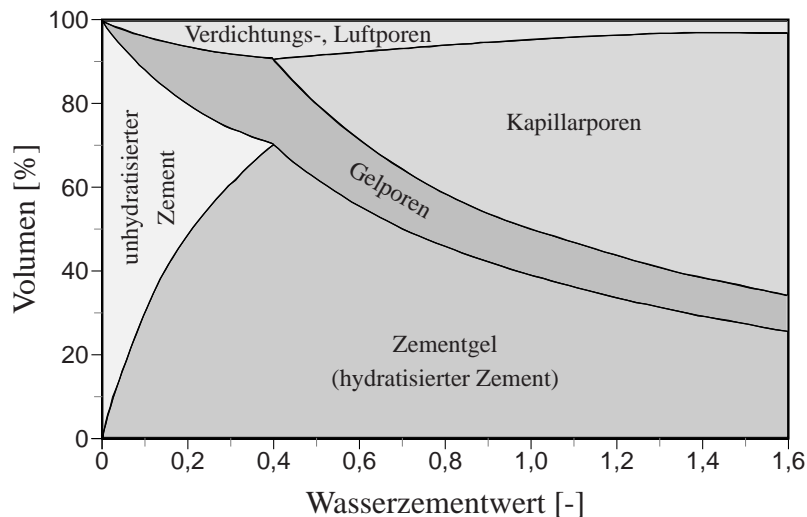


Bild 2.1: Zusammensetzung des Zementsteins bei vollständiger Hydratation

Darüber hinaus beeinflusst die Granulometrie des Zements die Eigenschaften des Zementsteins. Bild 2.1 zeigt die Zusammensetzung des Zementsteins bei vollständiger Hydratation in Abhängigkeit vom Wasserzementwert.

Zementart	Zusammensetzung in Masse-%		
	Portlandzementklinker	weitere Hauptbestandteile	Nebenbestandteile
CEM I	95 - 100	-	0 - 5
CEM II	65 - 94	6 - 35	0 - 5
CEM III	5 - 64	36 - 95	0 - 5
CEM IV	45 - 89	11 - 55	0 - 5
CEM V	20 - 64	18 - 50	0 - 5

Tabelle 2.1: Hauptzementarten nach DIN EN 197-1 [1]

Zement ist ein hydraulisches Bindemittel, das sowohl an der Luft als auch unter Wasser erhärtet und beständig ist [132]. Die wichtigsten Zemente sind in DIN EN 197-1 genormt und klassifiziert, wobei je nach Zusammensetzung und Art der Hauptbestandteile zwischen Portland- (CEM I), Portlandkomposit- (CEM II), Hochofen- (CEM III), Puzzolan- (CEM IV) und Komposit- (CEM V) Zementen zu unterscheiden ist, siehe Tabelle 2.1. Neben Portlandzementklinker enthält der Zement je nach Zementart

Hüttensand, Silicastaub, Puzzolane, Flugasche, gebrannten Schiefer oder Kalkstein als weitere Hauptbestandteile [1]. Nach Erhitzen bis zum Sintern entstehen aus dem Portlandzementklinker die in Tabelle 2.2 aufgeführten Klinkerphasen, die die Festigkeitsentwicklung des Zementsteins und den Hydratationsprozess maßgeblich beeinflussen.

Klinkerphasen	Kurzbezeichnung	chemische Formel	mittlerer Gehalt in Masse-%
Tricalciumsilikat	$C_3S$	$3 CaO \cdot SiO_2$	63
Dicalciumsilikat	$C_2S$	$2 CaO \cdot SiO_2$	16
Tricalciumaluminat	$C_3A$	$3 CaO \cdot Al_2O_3$	11
Calciumaluminatferrit	$C_4AF$	$4 CaO \cdot Al_2O_3 \cdot Fe_2O_3$	8

Tabelle 2.2: Hauptbestandteile des Portlandzementklinkers

Die Gesteinskörnung nimmt etwa 70 % des Betonvolumens ein und ist ein Gemenge von gebrochenen und unebrochenen Körnern aus natürlichen oder künstlichen mineralischen Stoffen, seltener organischen Stoffen [132]. In ihrer Struktur und ihren mechanischen Eigenschaften kaum veränderbar, beeinflusst diese vor allem die Steifigkeit des Betons. Die Eigenschaften der Gesteinskörnung hängen von der Art und Beschaffenheit der verwendeten mineralischen bzw. organischen Stoffe ab. Die Anforderungen an die Gesteinskörnung sind in DIN 4226 geregelt und werden z. B. von natürlichem Sand und Kies im Allgemeinen erfüllt. Festigkeit und Steifigkeit der Gesteinskörnung übersteigen bei Normalbetonen deutlich die des Zementsteins. Tabelle 2.3 gibt einen Überblick über die Größenordnung einzelner Bestandteile des Betongefüges [134].

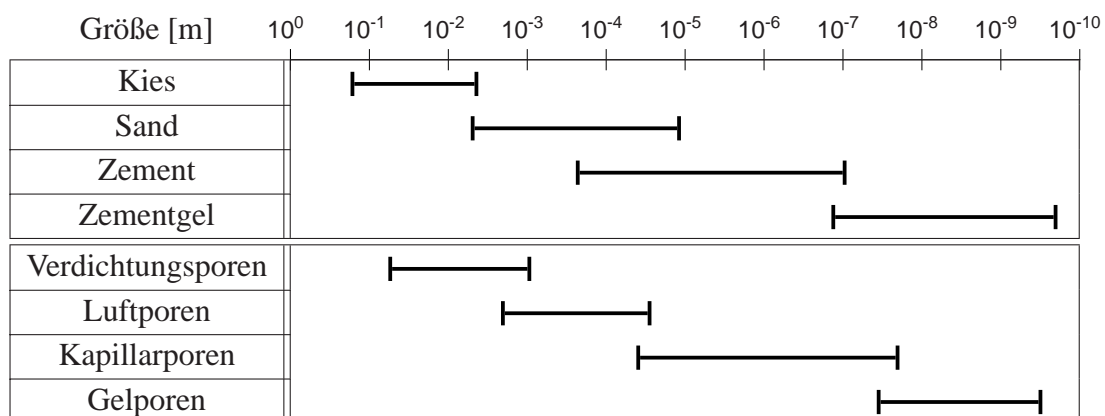


Tabelle 2.3: Größenordnung einzelner Bestandteile von Beton

Die Ansammlung von Wasser beim Verdichten des Betons führt insbesondere in der Kontaktzone zwischen Zementstein und Gesteinskörnung zu einer erhöhten Porosität [118], deren Folge eine verminderte Verbundfestigkeit ist. Die Kontaktzone ist daher die Schwachstelle des Gefüges, in der bereits im unbelasteten Zustand Mikrorisse vor-

handen sind. Ursache hierfür ist die Behinderung des Schwindens des Zementsteins durch die steifere, volumenstabile Gesteinskörnung. Bei der Entwicklung hochfester Betone wird deshalb primär versucht, die Verbundeigenschaften der Kontaktzone zu verbessern. So steigert die Zugabe von Silicastaub die Verbundfestigkeit und damit die Festigkeit des Betons erheblich [51].

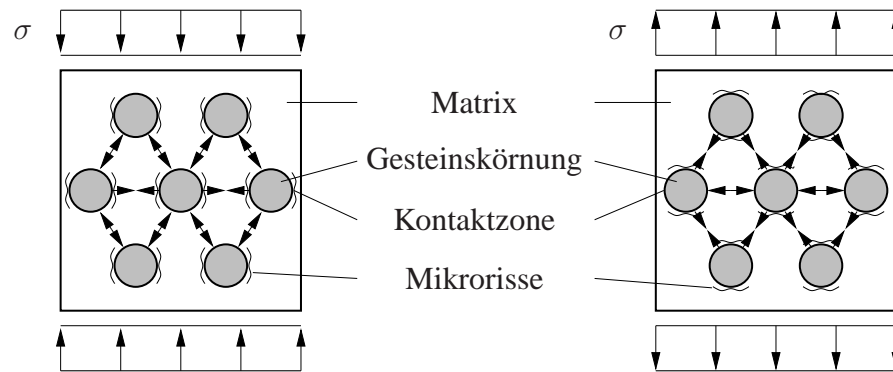


Bild 2.2: Kraftfluss im Betongefüge bei einaxialer Beanspruchung

Aufgrund der unterschiedlichen Materialeigenschaften von Zementstein und Gesteinskörnung entstehen selbst unter einaxialer Beanspruchung komplexe, räumliche Spannungszustände im Materialgefüge. Daher ist Beton nur im statistischen Mittel als homogener Werkstoff anzusehen. Bild 2.2 zeigt schematisch den Kraftfluss im Betongefüge sowie die bevorzugte Wachstumsrichtung von Mikrorissen unter Druck- und Zugbeanspruchung, wobei das Verhältnis der Steifigkeiten von Zementstein und Gesteinskörnung für den Kraftfluss im Betongefüge entscheidend ist.

## 2.2 Mechanisches Verhalten

Im folgenden Abschnitt wird das Kurzzeitverhalten normalfesten Betons unter ein- und zweiaxialer Beanspruchung erläutert. Zeitabhängige Prozesse, wie Kriechen und Relaxation oder Schwinden und Quellen, werden im Rahmen dieser Arbeit ebenso wie das Verhalten unter zyklischer Beanspruchung nicht untersucht. Beton reagiert auf Zug- und Druckbeanspruchung unterschiedlich, wobei die bereits vor Belastungsbeginn im Materialgefüge vorhandenen Mikrorisse sowohl unter Zug- als auch unter Druckbeanspruchung Ausgangspunkt weiterer Rissentwicklung und des damit verbundenen Versagensprozesses sind. Die maximal aufnehmbare Spannung trennt den Vor- und Nachbruchbereich und entspricht der Festigkeit des Materials. Zug- und Druckfestigkeit normalfester Betone sind vor allem von den mechanischen Eigenschaften des Zementsteins sowie der Haftung zwischen Zementstein und Gesteinskörnung abhängig, wobei die Zugfestigkeit etwa ein Zehntel der Druckfestigkeit beträgt.

In den letzten Jahrzehnten wurde das mechanische Verhalten von Beton unter ein- und zweiachsialer Beanspruchung ausführlich untersucht. Die experimentelle Bestimmung von Materialkennwerten insbesondere für den Nachbruchbereich ist jedoch schwierig, da Versuchsaufbau, Probengröße und -geometrie die Ergebnisse beeinflussen.

### 2.2.1 Einaxiale Druckbeanspruchung

Grundsätzlich kennzeichnen drei unterschiedliche Bereiche das Spannungs-Dehnungs-Verhalten von Beton unter Druckbeanspruchung, wie im linken Diagramm in Bild 2.3 dargestellt. Unter geringem Druck zeigt Beton ein nahezu linear-elastisches Verhalten (Bereich I). Erst ab etwa 40 % der Druckfestigkeit  $f_{cm}$  führt das Wachstum der bereits vor Belastungsbeginn in den Kontaktzonen zwischen Zementstein und Gesteinskörnung vorhandenen Mikrorisse zu einer überproportionalen Zunahme der Dehnung [123] (Bereich II). Die vorwiegend parallel zur Belastungsrichtung verlaufenden Mikrorisse wachsen ab etwa 80 % der Druckfestigkeit in den Zementstein hinein (Bereich III). Dabei findet Mikrorisswachstum zunächst im gesamten Prüfkörper statt [140]. Erst mit Erreichen der Druckfestigkeit führt ein lokales Versagen des Materials zum Bruch des Prüfkörpers. Bei lastgesteuerten Versuchen tritt ein schlagartiger Bruch auf, während bei weggesteuerten Versuchen die Spannung nach Überschreitung der Druckfestigkeit bis zum Bruch mit zunehmender Dehnung abfällt. Der Abfall der Spannung im Nachbruchbereich ist charakteristisch für das Strukturverhalten und wird als Entfestigung bezeichnet. Typisch für den Versagensprozess unter Druckbeanspruchung ist ferner das Auftreten irreversibler Verformungen und der Abfall der Anfangssteifigkeit [4].

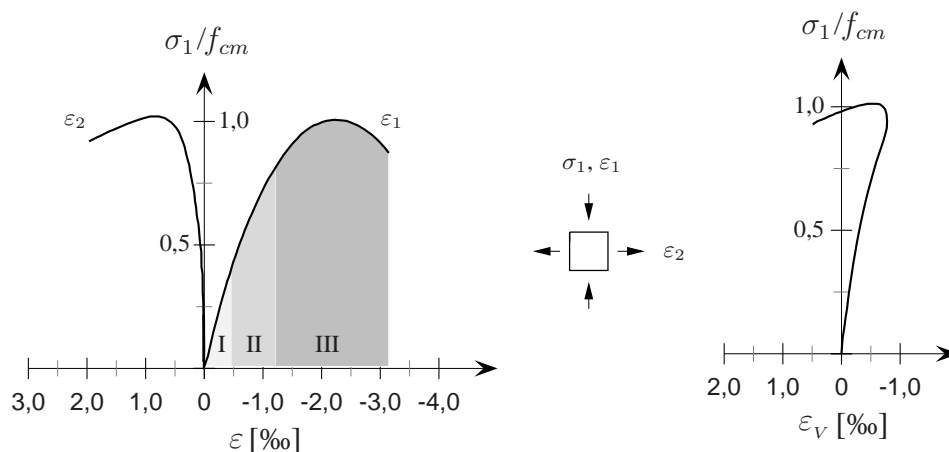


Bild 2.3: Spannungs-Dehnungs-Linien bei einaxialem Druck nach Kupfer et al. [82]

Wie das rechte Diagramm in Bild 2.3 verdeutlicht, nimmt das Prüfkörpervolumen bis zu Werten von etwa 90 % der Druckfestigkeit ab und steigt danach stark an. Gleichzeitig nimmt die Querdehnung  $\varepsilon_2$  deutlich zu, wie im linken Diagramm zu sehen. Die Volumenzunahme kurz vor Erreichen der Druckfestigkeit wird als Dilatanz bezeichnet.

Schickert [128] leitet auf Grundlage von Messwerten wie Längs-, Quer,- und Volumen-  
dehnung vier Schwellenwerte zur Charakterisierung unterschiedlicher Gefügestände  
von Beton ab. Darüber hinaus zeigt er, dass Versuchsergebnisse maßgeblich von der  
Art der Lasteinleitung und der damit verbundenen unterschiedlichen Querdehnungsbe-  
hinderung im Lasteinleitungsbereich abhängen.

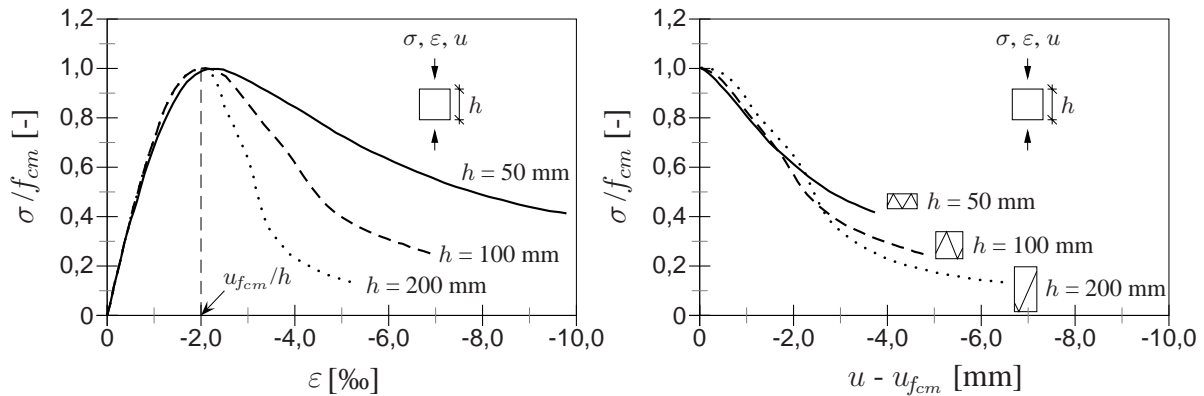
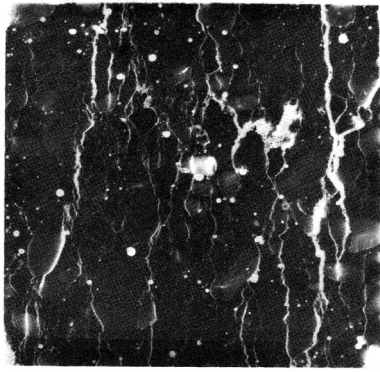


Bild 2.4: Maßstabeffekt bei einaxialem Druck nach van Mier [150]

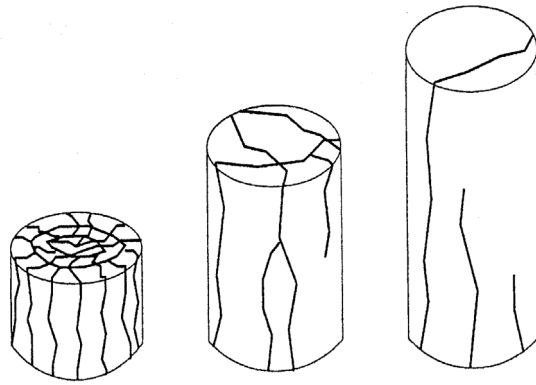
Bei weggesteuerten Versuchen an Prismen (Lasteinleitung über Stahlbürsten) beobachtet van Mier [150] nach Überschreitung der Druckfestigkeit eine Aufspaltung der Prüfkörper in eine Reihe weitgehend intakter Segmente. In den Scherbändern zwischen den einzelnen Segmenten treten erhebliche Gleitungen auf. Im Nachbruchbereich weisen die Spannungs-Dehnungs-Linien eine deutliche Abhängigkeit von der Prüfkörperhöhe  $h$  auf, während die Spannungs-Verschiebungs-Linien nur geringfügig voneinander abweichen, siehe Bild 2.4. Dieses Phänomen ist auf die Lokalisierung der Verformungen in einem örtlich begrenzten Bereich zurückzuführen. Die zur Zerstörung der Prüfkörper erforderliche Energie ist offensichtlich unabhängig von der Prüfkörperhöhe, was Experimente von Jansen & Shah [63] und Lee & Willam [85] an Zylindern bestätigen.

Im Gegensatz zu van Mier beobachtet Vonk [152], der in seinen Versuchen ebenfalls Prismen verwendet, die Lasten jedoch über Teflonplatten einleitet, eine Abhängigkeit des Spannungs-Verschiebungs-Verhaltens und damit der Bruchenergie von der Prüfkörperhöhe. Als Ursache hierfür nennt Vonk die geringere Querdehnungsbehinderung der Prüfkörper im Lasteinleitungsbereich. Zudem bewirkt die Lasteinleitung über Teflonplatten ein spröderes Verhalten der Prüfkörper. Aus der Abhängigkeit des Spannungs-Verschiebungs-Verhaltens von der Prüfkörperhöhe folgert Vonk, dass Materialversagen bei Beton eine Kombination eines lokalen und eines verteilten Prozesses ist. Das Bruchbild prägen unregelmäßig auftretende Spalt- und Schubrisse, wobei diese je nach Schlankheit, dem Verhältnis von Höhe zu Breite, über den gesamten Prüfkörper verteilt auftreten können. Bild 2.5 zeigt ein typisches Rissmuster eines Prismas, das bei Lasteinleitung über Teflonplatten oder Stahlbürsten entsteht. Charakteristisch für das Bruchbild von Zylindern dagegen sind Spaltrisse.





Prisma nach Vonk [153]



Zylinder nach Lee & Willam [85]

Bild 2.5: Rissmuster bei unterschiedlicher Schlankheit und Geometrie der Prüfkörper

Lee & Willam [85] beobachteten in Versuchen an Zylindern (Lasteinleitung über Stahlplatten, Oberfläche der Zylinder im Bereich der Lasteinleitung geschliffen und mit Schmierfett versehen), dass sowohl die Bruchenergie als auch das Verhältnis von radialer zu axialer Verschiebung weitgehend unabhängig von der Prüfkörperhöhe ist. Im Nachbruchbereich steigt das Verhältnis von radialer zu axialer Verschiebung zunächst stark an und bleibt ab etwa 60 % der Druckfestigkeit bis zum Bruch konstant. Den markanten Anstieg der radialen gegenüber der axialen Verschiebung zu Beginn der Entfestigung begründen Lee & Willam mit dem Einsetzen eines kombinierten Zug-Schub-Versagens, während ihrer Ansicht nach ab etwa 60 % der Druckfestigkeit allein Zugversagen den Versagensprozess bestimmt. Vonk [153] hingegen erachtet Schubversagen als maßgebend und sieht in dem Auftreten von Spaltrissen lediglich eine Modifikation des Schubversagens. Letztendlich ist der genaue Versagensmechanismus von Beton unter Druckbeanspruchung nicht vollständig geklärt.

### 2.2.2 Einaxiale Zugbeanspruchung

Die zentrische Zugfestigkeit  $f_{ctm}$  ist definiert als die maximal aufnehmbare Zugspannung eines axial auf Zug beanspruchten Prüfkörpers. Alternativ kann das Verhalten von Beton unter Zugbeanspruchung in Biegezug- und Spaltzugversuchen bestimmt werden, die unter versuchstechnischen Aspekten einfacher durchzuführen sind.

Bis zu etwa 70 % der Zugfestigkeit findet kein nennenswertes Wachstum von Mikrorissen statt, so dass Spannung und Dehnung voneinander linear abhängen [123]. Bei weiterem Anstieg der Belastung beginnt das Wachstum von Mikrorissen, wobei deren Ausbreitung vorwiegend orthogonal zur äußeren Belastungsrichtung erfolgt. Das Spannungs-Dehnungs-Verhalten bleibt allerdings nahezu linear. Erst ab etwa 90 % der

Zugfestigkeit ist eine ausgeprägte überproportionale Zunahme der Dehnung zu erkennen. Mit dem Zusammenwachsen von Mikrorissen in einem örtlich eng begrenzten Bereich, der Prozesszone, entsteht ein makroskopischer Riss, der den Versagensprozess einleitet. Dabei forcieren Spannungskonzentrationen die Rissbildung. Mit Erreichen der Zugfestigkeit tritt bei lastgesteuerten Versuchen schlagartig Versagen auf, während bei weggesteuerten Versuchen aufgrund der Verzahnung und Reibung zwischen den Rissflanken eine Kraftübertragung weiterhin möglich ist [36]. Die Verformungen im angerissenen Querschnitt nehmen nach Überschreitung der Zugfestigkeit infolge weiterer Mikrorissbildung und der Ausdehnung der Prozesszone stark zu. In der restlichen Struktur hingegen nehmen die Verformungen infolge der Materialentlastung ab.

Charakteristisch für das Versagen von Beton unter Zugbeanspruchung ist ein Trennbruch, der orthogonal zur äußeren Belastungsrichtung verläuft. Für den Nachbruchbereich ist wie bereits unter Druckbeanspruchung das Spannungs-Verschiebungs-Verhalten maßgebend, da die Dehnung infolge der Lokalisierung der Verformungen von der Prüfkörperhöhe abhängt. Bild 2.6 zeigt Spannungs-Verschiebungs-Linien von Beton unter monotoner und zyklischer Beanspruchung. Wie das rechte Diagramm verdeutlicht, treten im Nachbruchbereich zum einen irreversible Verformungen auf, zum anderen fällt die Anfangssteifigkeit deutlich ab. Allerdings nimmt die Steifigkeit bei einem Lastwechsel von Zug auf Druck infolge des Schließens der Risse wieder ihren ursprünglichen Wert an.

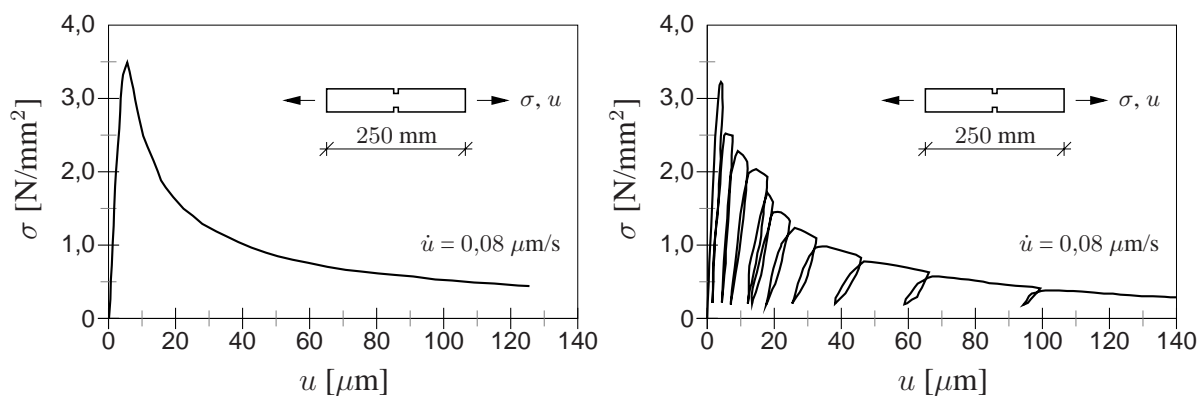


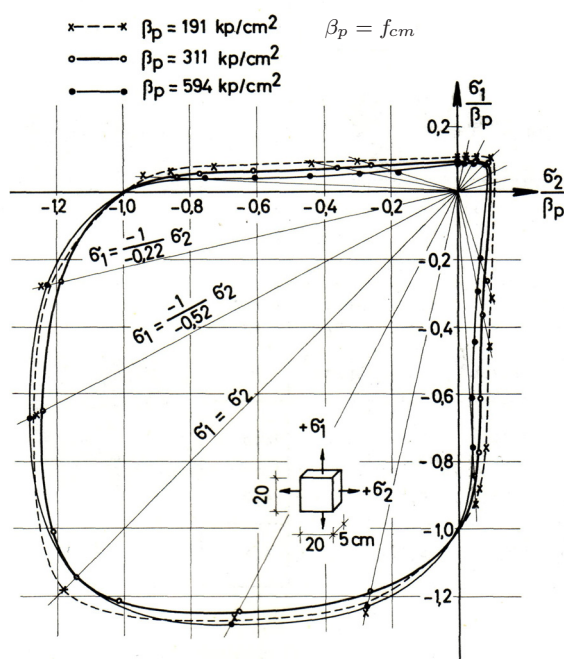
Bild 2.6: Spannungs-Verschiebungs-Linien bei einaxialem Zug nach Reinhardt [122]

Ein weiterer Kennwert zur Beurteilung des Widerstands von Beton gegenüber Zugbeanspruchung ist neben der Festigkeit des Materials die Bruchenergie  $G_t$ . Sie entspricht der Energie, die zur Erzeugung eines Risses der Einheitsfläche erforderlich ist und hängt insbesondere von der Betondruckfestigkeit, vom Verbund zwischen Zementstein und Gesteinskörnung sowie vom Größtkorn der Gesteinskörnung ab [123].

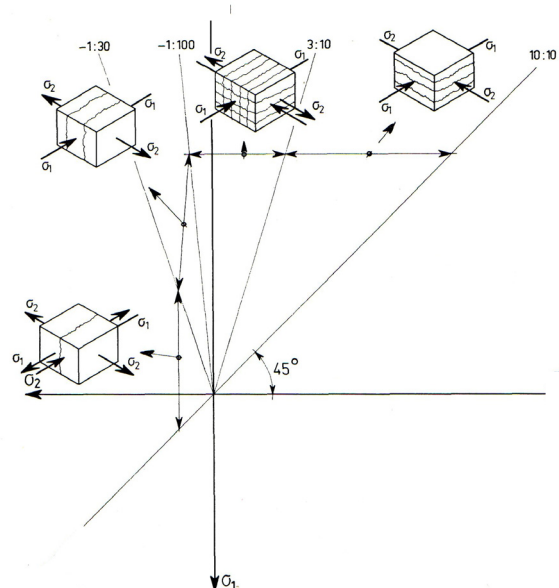


### 2.2.3 Biaxiale Beanspruchung

Das Kurzzeitverhalten von Beton unter biaxialer Beanspruchung wurde u. a. von Kupfer [81] und Nelissen [104] ausführlich untersucht. In beiden Versuchsreihen erfolgt die Lasteinleitung weitgehend zwangsfrei über Stahlbürsten. Die Verwendung massiver Stahlplatten zur Lasteinleitung hingegen bewirkt eine deutliche Steigerung der Festigkeit und Duktilität [81], was auf die erhöhte Querdehnungsbehinderung im Lasteinleitungsbereich zurückzuführen ist. Die in Bild 2.7 dargestellte Versagenskurve gibt für beliebige biaxiale Spannungszustände die Festigkeit an. Mit Hilfe der Versagenskurve und den zugehörigen Spannungs-Verschiebungs-Linien ist das Materialverhalten von Beton unter biaxialer Beanspruchung beschreibbar.



Versagenskurve nach Kupfer [81]



Versagensarten nach Nelissen [104]

Bild 2.7: Versagenskurve und -arten bei biaxialer Beanspruchung

Die Festigkeit von Beton unter biaxialem Zug entspricht der einaxialen, zentrischen Zugfestigkeit und ist unabhängig vom Verhältnis der Hauptspannungen. Bei biaxialem Druck hingegen steigt die Festigkeit abhängig vom Verhältnis der Hauptspannungen um bis zu 25 % gegenüber der einaxialen Druckfestigkeit an. Bei kombinierter Zug-Druckbeanspruchung dagegen fällt die Festigkeit mit zunehmender Zugspannung stark ab. Ursache hierfür ist ein gegenüber der einaxialen Druckfestigkeit beschleunigtes Mikrorisswachstum im Vorbruchbereich infolge der Querkzugspannung. Je nach Hauptspannungsverhältnis variiert die Art des Versagens, wie im rechten Diagramm in Bild 2.7 schematisch dargestellt.

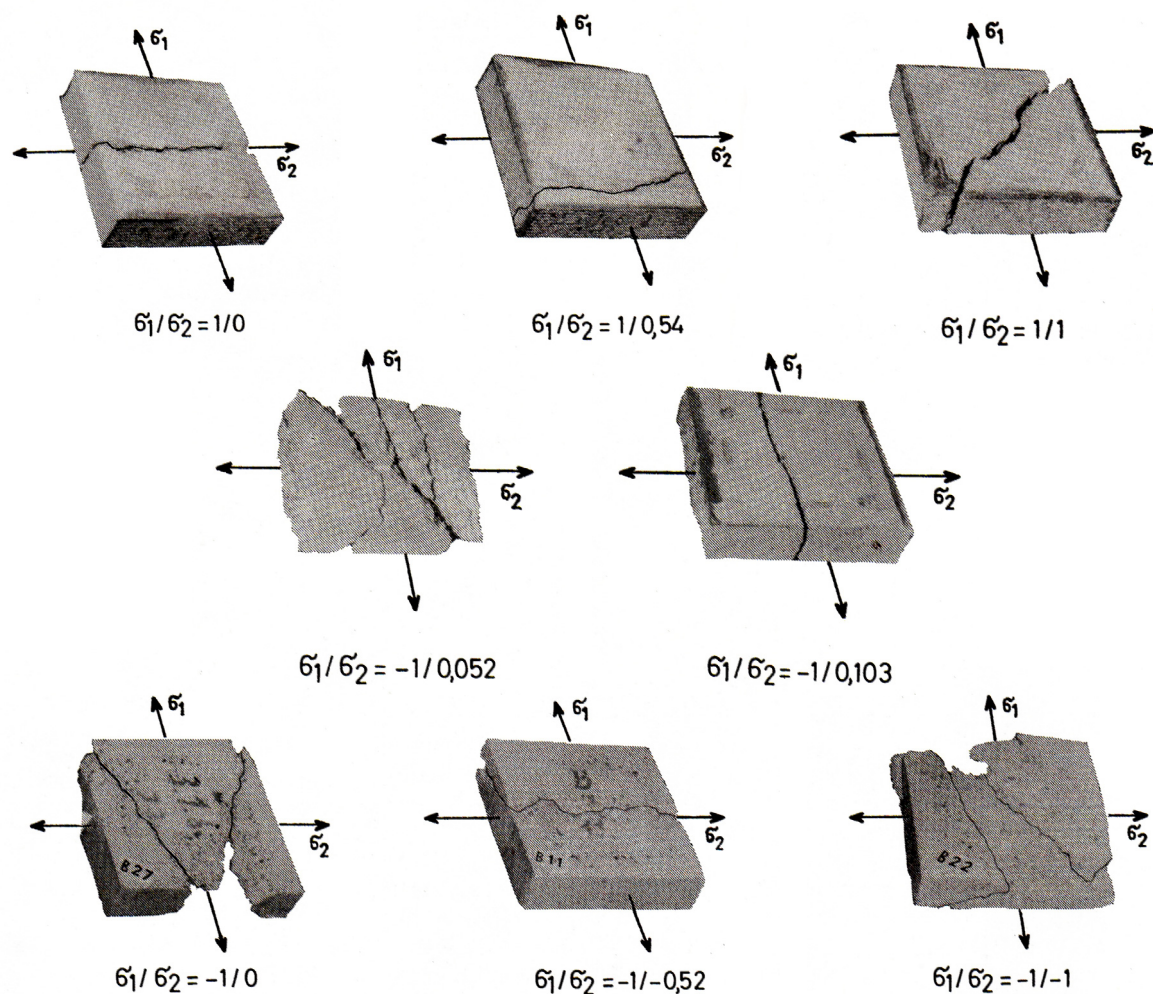


Bild 2.8: Bruchbilder nach Kupfer [81]

Bild 2.8 zeigt Bruchbilder von Beton für ausgewählte Hauptspannungskombinationen. Bei biaxialem Zug sowie bei Zug mit geringem Querdruck entsteht ein reiner Trennbruch, der stets orthogonal zur Richtung der größten Hauptzugspannung verläuft. Nimmt der Querdruck zu, so setzt ein kombiniertes Zug-Schub-Versagen ein, während bei biaxialem Druck ein Spaltbruch eintritt. Die Bruchebene liegt dabei näherungsweise senkrecht zur Belastungsebene.

## 2.3 Schadensursachen bei innerer Beanspruchung

Neben äußeren Belastungen können im Inneren des Betons ablaufende chemische oder physikalische Prozesse das Material schädigen. Hinsichtlich ihrer Auswirkungen auf das Material ist zwischen lösenden und treibenden Angriffen zu unterscheiden [74]. Das im Rahmen dieser Arbeit entwickelte Materialmodell berücksichtigt neben äußere-

ren Belastungen auch jene, die aus treibenden Angriffen resultieren. Die Auswirkungen dieser Belastungen auf das Verformungsverhalten werden dabei mit Hilfe eines mikro-mechanischen Modells am Beispiel des Sulfattreibens untersucht.

### **2.3.1 Lösende und treibende Angriffe**

Bei Kontakt mit bestimmten Molekülen oder Atomen können im Beton neue chemische Verbindungen entstehen, die zu Veränderungen der Materialstruktur führen. Phasenumwandlungen und -neubildungen sind mögliche Folgen eines chemischen Angriffs und verändern die ursprünglichen Materialeigenschaften. Die Widerstandsfähigkeit von Beton gegenüber chemischen Angriffen hängt sowohl von der Dichtigkeit des Betons als auch von der Zusammensetzung und Konzentration der einwirkenden Stoffe ab, wobei Risse im Material den Schadstoffeintrag beschleunigen.

Unter lösendem Angriff ist die Schwächung des inneren Verbundes zu verstehen, die mit dem Verlust festigkeitsbestimmender Bestandteile im Materialgefüge einhergeht. Verursacher sind zum einen austauschfähige Salze [73], wie Magnesium- oder Ammoniumsalze, zum anderen organische oder anorganische Säuren. Dabei ist insbesondere der Zementstein aufgrund seiner basischen Eigenschaften wenig widerstandsfähig gegenüber Säuren, die mit einzelnen Bestandteilen des Zementsteins reagieren. Als Reaktionsprodukte entstehen Salze, die in Gegenwart von Wasser gelöst und durch Diffusion oder Konvektion aus dem Materialgefüge transportiert werden. Zu den lösenden Angriffen gehört das Calcium-Auslaugen.

Treibende Angriffe, wie das Sulfattreiben oder die Alkali-Kieselsäure-Reaktion, beruhen dagegen auf der Neubildung expansiv wirkender Phasen im erhärteten Materialgefüge. Der zum Wachstum zur Verfügung stehende Raum ist jedoch begrenzt, so dass Spannungen im Materialgefüge entstehen können, die bei Überschreitung lokaler Festigkeiten Mikrorissbildung und -wachstum bewirken.

In Kombination treten lösende und treibende Angriffe bei Brandeinwirkung auf. Dabei setzt die Dehydratation einzelner Bestandteile des Zementsteins Wasser frei, das verdampft und dadurch Druck auf das umgebende Materialgefüge ausübt. Gleichzeitig wird mit dem Lösen von gebundenem Wasser aus dem Materialgefüge der innere Verbund des Betons geschwächt.

### **2.3.2 Sulfattreiben**

Schäden im Zusammenhang mit Sulfaten treten vor allem bei der Wärmebehandlung von Betonfertigteilen, bei der Instandsetzung historischen Mauerwerks sowie an Abwasserrohrleitungssystemen auf. Zudem können Schäden an Betonfundamenten bei

Kontakt mit sulfathaltigem Grundwasser oder Boden entstehen, wenn die verwendeten Zemente keinen ausreichenden Sulfatwiderstand aufweisen [129]. Ein typisches Schadensbild sind schalenartige Abplatzungen an der Betonoberfläche, siehe Bild 2.9. Als Ursache für die Schädigung von Beton bei Sulfateinwirkung werden Rekristallisationsprozesse im Materialgefüge angesehen.

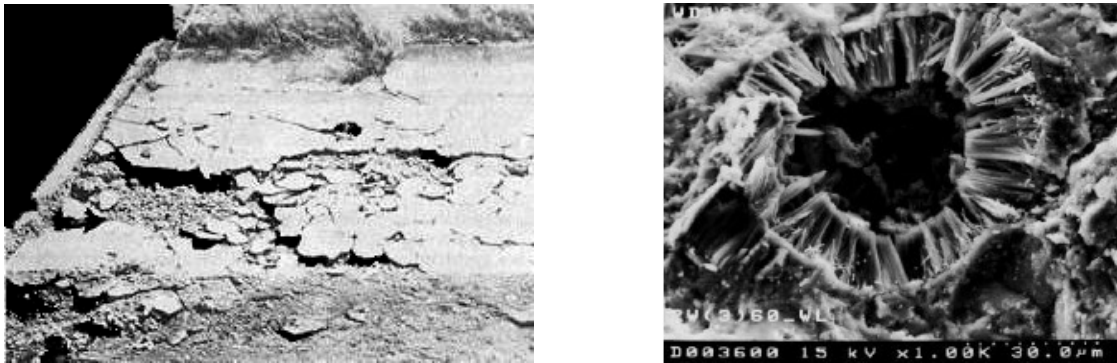
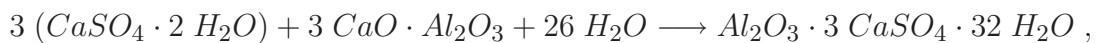


Bild 2.9: Sulfatschäden an einer Bodenplatte - Pore mit Ettringitkristallen [14]

Sulfathaltige Lösungen dringen aufgrund ihres hohen Benetzungsvermögens relativ schnell und tief in den Beton ein [129]. Neben dem Porensystem bieten thermisch oder anderweitig verursachte Mikrorissysteme einen effizienten Transportweg für die Reaktanden. Die chemische Reaktion von Sulfationen mit Calciumaluminat bzw. Calciumaluminathydrat führt zur Bildung neuer Phasen im erhärteten Materialgefüge. Hierbei entsteht das kristallwasserreiche Tricalciumaluminat-Trisulfathydrat, kurz Ettringit



das gegenüber seinen Ausgangsprodukten etwa das achtfache Volumen besitzt. Der aus dem enormen Volumenbedarf des Ettringits resultierende Kristallisationsdruck wird oft als Ursache für den treibenden Angriff angesehen. Dabei entsteht bereits zu Beginn der Hydratation, unmittelbar nach der Zugabe von Wasser zum Zement, Ettringit, der das Abbindeverhalten des plastischen Zementleims maßgeblich beeinflusst [90]. Die primäre Ettringitbildung im plastischen Zementleim ist jedoch im Gegensatz zur sekundären Ettringitbildung im erhärteten Materialgefüge nicht gefügeschädigend.

Experimentelle Untersuchungen der sekundären Ettringitbildung bzw. des Sulfattreibens wurden in jüngerer Zeit u. a. von Bollmann [14], Malorny [93] und Santhanam et al. [126, 127] durchgeführt. Bezüglich der Rolle des Ettringits beim Schädigungsprozess existieren allerdings unterschiedliche Auffassungen. Während Bollmann [14] den in Poren und Mikrorissen nachweisbaren Ettringit nicht als Ursache für die Schädigung ansieht, beobachtet Schmidt-Döhl [131] eine Korrelation von Ettringitneubildung und makroskopischer Dehnung. Malorny [93] stuft die sekundäre Ettringitbildung ebenfalls als gefügeschädigend ein.



Hinsichtlich der Schädigungsmechanismen existieren im Wesentlichen zwei Theorien, die Quell- und Kristallwachstumstheorie, über die in der Literatur zum Teil kontrovers diskutiert wird [34, 164]. Laut Quelltheorie bewirkt nicht die sekundäre Ettringitbildung, sondern die spätere Adsorption von Wasser an der Oberfläche feinkristalliner Ettringitpartikel die makroskopische Dehnungszunahme [96]. Demnach besteht kein direkter Zusammenhang zwischen der Menge an neu gebildetem Ettringit und makroskopischer Dehnung. Nach der Kristallisationstheorie hingegen korreliert die makroskopische Dehnung mit der Menge an neu gebildetem Ettringit. Dieser entsteht entweder nach topochemischer Reaktion an der Oberfläche aluminathaltiger Phasen [109], wie  $C_3A$ -Partikeln, oder aus einer übersättigten Lösung im Porenraum [99]. Voraussetzung für den Aufbau gefügeschädigender Kristallisationsdrücke ist allerdings ein räumlich begrenztes Kristallwachstum [162, 163]. Im Einklang mit dem in Poren und Mikrorissen mikroskopisch nachweisbarem Ettringit, liefert die Kristallisationstheorie eine plausible Erklärung für den Schädigungsprozess.

Bei der Kristallisation aus einer übersättigten Lösung entstehen nach Keimbildung im Bereich der Porenwandungen zunächst kleine, unregelmäßig strukturierte Partikel, die sich bei weiterem Wachstum zu nadelähnlichen Kristallen entwickeln und in die Poren hineinwachsen, siehe Bild 2.9. Sobald das freie Kristallwachstum nicht mehr möglich ist, entsteht ein starker Druck auf die Porenwandungen, der zu Spannungen im Materialgefüge führt. Überschreiten diese die lokale Festigkeit entstehen Mikrorisse [129]. Für das Auftreten gefügeschädigender Kristallisationsdrücke sind neben entsprechenden Umgebungsbedingungen vor allem die Porenradienverteilung und die Übersättigung der Porenlösung mit Reaktanden verantwortlich. Die Reaktanden sind in Form von Calciumaluminatverbindungen im Betongefüge lokal vorhanden, können aber auch in ionaler Form durch Diffusions- oder kapillare Strömungsprozesse zugeführt werden. Einerseits ist eine bestimmte Mindestgröße der Poren Voraussetzung für die Stabilität und das weitere Wachstum der Kristalle, andererseits entstehen in Poren mit großen Radien keine gefügeschädigenden Kristallisationsdrücke, da die zum Aufbau der Drücke notwendige Übersättigung nicht aufrecht erhalten werden kann. Im Beton treten daher nur in Poren bestimmter Größe gefügeschädigende Kristallisationsdrücke auf.



### 3 Grundlagen der Materialmodellierung

Die Modellierung des Verformungsverhaltens von Beton erfolgt in dieser Arbeit mit Hilfe der Kontinuumsmechanik. Für Strukturanalysen im Rahmen der Kontinuumsmechanik sind kinematische Beziehungen, Bilanz- und Materialgleichungen notwendig, wobei eine Bewertung der Materialgleichungen hinsichtlich ihrer physikalischen Plausibilität mit Hilfe der Thermodynamik möglich ist. Die zur Beschreibung des zeitunabhängigen Verformungsverhaltens von Beton erforderlichen Materialgleichungen werden hier unter Berücksichtigung thermodynamischer Aspekte diskutiert.

#### 3.1 Klassifizierung von Materialmodellen

Für die Beschreibung des Verformungsverhaltens kohäsiver Reibungsmaterialien wie Beton gibt es eine Vielzahl von Modellen. Hinsichtlich der Modellierung der Materialstruktur ist zwischen diskreten Modellen und Kontinuumsmodellen zu unterscheiden.

Diskrete Modelle wie Partikel- oder Gittermodelle berücksichtigen im Gegensatz zu Kontinuumsmodellen die Materialstruktur, deren Modellierung z. B. mit Hilfe von Stäben, Balken oder Partikeln erfolgt. Erst das Zusammenwirken der einzelnen Elemente bestimmt das Materialverhalten. Diskrete Modelle zur Analyse spröder Materialien wie Beton verwenden u. a. Wittmann et al. [160], Schlangen [130] sowie Jirásek & Bažant [66, 67]. Der Anwendungsbereich diskreter Modelle ist auf kleine Strukturen beschränkt, da bei numerischer Simulation die Diskretisierung der Struktur eine große Anzahl von Freiheitsgraden und somit enormen Berechnungsaufwand bedingt.

Kontinuumsmodelle hingegen beschreiben das Materialverhalten phänomenologisch, ohne die Materialstruktur eines Körper zu berücksichtigen. Der Körper wird bei kontinuumsmechanischer Betrachtung als zusammenhängendes Gebiet materieller Punkte angesehen, denen effektive Materialeigenschaften zugewiesen werden, die das Verhalten der Mikrostruktur integral beschreiben. Demnach repräsentiert ein materieller Punkt ein differentielles Volumen des Körpers. Der Kontinuumsmechanik liegt die Annahme zugrunde, dass Inhomogenitäten im Material wie Mikrorisse im Verhältnis zum betrachteten differentiellen Volumen klein sind. Das Wachstum von Mikrorissen führt jedoch zur Entstehung makroskopischer Risse, deren kontinuumsmechanische Beschreibung lediglich eine Näherung darstellt. Im Gegensatz zu diskreten Modellen ist der

Berechnungsaufwand bei Kontinuumsmodellen wesentlich geringer, da eine Modellierung der Materialstruktur nicht erforderlich ist.

Kontinuumsmodelle sind aufgrund ihrer Effizienz zur Beschreibung des Strukturverhaltens besonders geeignet. Deshalb erfolgt die Materialmodellierung in dieser Arbeit mit Hilfe eines Kontinuumsmodells, wobei Auswirkungen von Rissbildung und -wachstum auf das Verformungsverhalten von Beton im Rahmen einer mikromechanischen Betrachtung an einem diskreten Modell untersucht werden, vergleiche Kapitel 5.

## 3.2 Grundlagen der Kontinuumsmechanik

Für eine kontinuumsmechanische Beschreibung des Strukturverhaltens sind materialunabhängige und materialabhängige Modellgleichungen erforderlich. Die kinematischen Beziehungen und die Bilanzgleichungen zählen zu den materialunabhängigen Modellgleichungen. Eine Einführung in die Grundlagen der Kontinuumsmechanik geben u. a. Altenbach & Altenbach [3] sowie Stein & Barthold [143].

### 3.2.1 Kinematik

In der Kontinuumsmechanik bestimmt der Ortsvektor die Lage eines materiellen Punktes im Körper. Dabei ist zwischen dem Ortsvektor  $\mathbf{X}$  der Referenzkonfiguration und dem Ortsvektor  $\mathbf{x}$  der Momentankonfiguration eines Körpers zu unterscheiden. Der Verschiebungsvektor

$$\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{X} \quad (3.1)$$

stellt den Zusammenhang zwischen beiden Konfigurationen her und beschreibt die Bewegung eines materiellen Punktes. Mit der differentiellen Änderung des Ortsvektors  $d\mathbf{x} = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{X}$  folgt unter Berücksichtigung von Gl. (3.1) der Deformationsgradient zu

$$\mathbf{F} = \nabla_{\mathbf{X}} \otimes \mathbf{x} = \nabla_{\mathbf{X}} \otimes \mathbf{u} + \mathbf{I} \quad (3.2)$$

In der Referenzkonfiguration beschreibt der Green-Lagrange'sche Verzerrungstensor

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} - \mathbf{I}) = \frac{1}{2}(\nabla_{\mathbf{X}} \otimes \mathbf{u} + (\nabla_{\mathbf{X}} \otimes \mathbf{u})^T + (\nabla_{\mathbf{X}} \otimes \mathbf{u})^T \cdot (\nabla_{\mathbf{X}} \otimes \mathbf{u})) \quad (3.3)$$

den Deformationszustand eines Körpers (Lagrange'sche Betrachtungsweise). Ein geeignetes Verzerrungsmaß in der Momentankonfiguration (Euler'sche Betrachtungsweise) hingegen ist der Almansi'sche Verzerrungstensor

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2}(\mathbf{I} - \mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{F}^{-1}) = \frac{1}{2}(\nabla_{\mathbf{x}} \otimes \mathbf{u} + (\nabla_{\mathbf{x}} \otimes \mathbf{u})^T - (\nabla_{\mathbf{x}} \otimes \mathbf{u})^T \cdot (\nabla_{\mathbf{x}} \otimes \mathbf{u})) \quad (3.4)$$

Beide Verzerrungstensoren sind symmetrisch und nehmen für reine Starrkörperverschiebungen den Wert null an.



## Auswirkungen einer geometrischen Linearisierung

Die vorgestellten Verzerrungsmaße gelten ohne Einschränkung der Größe der Verschiebungen und Verzerrungen. Unter der Voraussetzung kleiner Deformationen sind Terme höherer Ordnung vernachlässigbar und eine Unterscheidung zwischen Lagrange'scher und Euler'scher Betrachtungsweise ist nicht erforderlich. Folglich gilt unabhängig von der gewählten Betrachtungsweise für den linearisierten Verzerrungstensor

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\nabla \otimes \mathbf{u} + (\nabla \otimes \mathbf{u})^T) = \nabla^{sym} \otimes \mathbf{u} \quad \text{mit} \quad \nabla \equiv \nabla_X = \nabla_x . \quad (3.5)$$

Der linearisierte Verzerrungstensor entspricht dem symmetrischen Anteil des Verschiebungsgradienten und beschreibt in dieser Arbeit den Deformationszustand.

### 3.2.2 Bilanzgleichungen

Zu den Bilanzgleichungen zählen Masse-, Impuls- und Drehimpulsbilanz. Ändert sich die zu bilanzierende Größe nicht, besitzt die Bilanzgleichung den Charakter einer Erhaltungsgleichung. Für hinreichend glatte Felder der zu bilanzierenden Größe folgt aus der integralen, globalen Form die lokale Form der Bilanzgleichung.

#### Massebilanz

Die Masse eines Körpers ist über die Dichte  $\rho(\mathbf{x}, t)$  definiert zu

$$m = \int_{\Omega} \rho \, d\Omega , \quad (3.6)$$

wobei das Volumen des Körpers das Gebiet  $\Omega$  umfasst. Bleibt die Masse konstant, so folgt mit dem Geschwindigkeitsvektor  $\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t)$  die lokale Form der Massebilanz, auch als Kontinuitätsbedingung bezeichnet, zu

$$\dot{\rho} + \rho \nabla_x \cdot \dot{\mathbf{u}} = 0 . \quad (3.7)$$

#### Impulsbilanz

Die zeitliche Änderung des Impulses ist gleich der Summe aller von außen auf einen Körper wirkenden Kräfte,

$$\frac{D}{Dt} \int_{\Omega} \rho \dot{\mathbf{u}} \, d\Omega = \int_{\Omega} \rho \mathbf{b} \, d\Omega + \int_{\partial\Omega} \mathbf{T} \cdot \mathbf{n} \, d(\partial\Omega) . \quad (3.8)$$

Zu diesen zählen die massebezogene Kraft  $\mathbf{b}(\mathbf{x}, t)$  und die auf der Oberfläche  $\partial\Omega$  des Körpers wirkenden Kräfte  $\mathbf{t} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{n}$ , die entsprechend dem Cauchy-Theorem mit dem

nach außen gerichteten Normalenvektor  $\mathbf{n}(\mathbf{x}, t)$  und dem Cauchy'schen Spannungstensor  $\mathbf{T}(\mathbf{x}, t)$  bestimmt sind. Der Cauchy'sche Spannungstensor nimmt Bezug auf die Momentankonfiguration und repräsentiert den wahren Spannungszustand an einem materiellen Punkt. Aus Gl. (3.8) resultiert unter Berücksichtigung der Massebilanz und des Gauß'schen Integralsatzes die lokale Form der Impulsbilanz

$$\rho \ddot{\mathbf{u}} = \nabla_x \cdot \mathbf{T} + \rho \mathbf{b} . \quad (3.9)$$

Für den Fall statischer Beanspruchung folgt mit  $\rho \ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{0}$  die Gleichgewichtsbedingung

$$\nabla_x \cdot \mathbf{T} + \rho \mathbf{b} = \mathbf{0} . \quad (3.10)$$

### Drehimpulsbilanz

Die zeitliche Änderung des Drehimpulses ist gleich dem Gesamtmoment aller von außen auf einen Körper wirkenden Kräfte. Aus der Drehimpulsbilanz folgt bei klassischen Kontinua (Boltzmann) die Symmetrie des Cauchy'schen Spannungstensors

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}^T . \quad (3.11)$$

### Auswirkungen einer geometrischen Linearisierung

Alternativ ist eine Darstellung der Bilanzgleichungen in Lagrange'scher Betrachtungsweise möglich, wobei dann statt des Cauchy'schen Spannungstensors  $\mathbf{T}(\mathbf{x}, t)$  der 2. Piola-Kirchhoff'sche Spannungstensor  $\mathbf{P}(\mathbf{X}, t)$  verwendet wird. Da im Beton allerdings nur kleine Deformationen auftreten, ist eine Unterscheidung zwischen Lagrange'scher und Euler'scher Betrachtungsweise nicht notwendig. Daher wird in dieser Arbeit wie bei kleinen Deformationen üblich der Spannungstensor mit  $\boldsymbol{\sigma} \equiv \mathbf{T} = \mathbf{P}$  und der Gradient mit  $\nabla \equiv \nabla_X = \nabla_x$  gekennzeichnet. Somit nimmt die Gleichgewichtsbedingung folgende Form an

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{b} = \mathbf{0} \quad \text{mit} \quad \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^T . \quad (3.12)$$

## 3.3 Grundlagen der Thermodynamik

In der Thermodynamik erfolgt die Überprüfung der Plausibilität physikalischer Prozesse anhand energetischer Betrachtungen. Hierzu ist die Definition eines thermodynamischen Potentials, das den energetischen Zustand eines Körpers charakterisiert, erforderlich. Mit dem thermodynamischen Potential sind dann in Verbindung mit den Hauptsätzen der Thermodynamik Restriktionen für die Materialgleichungen herleitbar.

### 3.3.1 Der 1. Hauptsatz der Thermodynamik

Nur für abgeschlossene Systeme, in denen kein Energie- und Masseaustausch mit der Umgebung stattfindet, bleibt laut dem 1. Hauptsatz der Thermodynamik die Gesamtenergie erhalten. Diese setzt sich additiv aus der inneren Energie  $U$  und der kinetischen Energie  $K$  zusammen. Nach dem 1. Hauptsatz der Thermodynamik ist die zeitliche Änderung der Gesamtenergie gleich der Summe der Leistung  $W$  aller äußeren Kräfte und der Wärmezufuhrleistung  $Q$ . Somit gilt unter Berücksichtigung des Wärmequellterms  $r$ , der Wärmestromdichte  $\mathbf{q}$  sowie der spezifischen inneren Energie  $e$

$$\frac{D}{Dt}(U + K) = W + Q \quad (3.13)$$

mit

$$\begin{aligned} U &= \int_{\Omega} \rho e \, d\Omega, & K &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho \dot{\mathbf{u}} \cdot \dot{\mathbf{u}} \, d\Omega, \\ W &= \int_{\Omega} \rho \mathbf{b} \cdot \dot{\mathbf{u}} \, d\Omega + \int_{\partial\Omega} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) \cdot \dot{\mathbf{u}} \, d(\partial\Omega), \\ Q &= \int_{\Omega} \rho r \, d\Omega - \int_{\partial\Omega} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} \, d(\partial\Omega). \end{aligned}$$

Nach Anwendung des Gauß'schen Integralsatzes folgt mit der Masse- und der Impulsbilanz sowie der Annahme, dass Gl. (3.13) für beliebig kleine Teilvolumina des Körpers gilt, der 1. Hauptsatz der Thermodynamik in lokaler Form zu

$$\rho \dot{e} = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \rho r - \nabla \cdot \mathbf{q}. \quad (3.14)$$

Bleibt die Gesamtenergie erhalten, so ist nur eine Transformation einer Energieform in eine andere möglich. Über die Richtung solcher Energietransformationen enthält der 1. Hauptsatz der Thermodynamik jedoch keine Angaben. Diese liefert der 2. Hauptsatz der Thermodynamik.

### 3.3.2 Der 2. Hauptsatz der Thermodynamik

Damit ein Modell keine unphysikalischen Prozesse beschreibt, müssen die Materialgleichungen dem 2. Hauptsatz der Thermodynamik genügen. Der 2. Hauptsatz der Thermodynamik ist im Allgemeinen eine Ungleichung, welche die Richtung irreversibler Prozesse vorgibt. Für eine thermodynamisch konsistente Beschreibung irreversibler Prozesse wird die Entropie  $S$  als Zustandsvariable eingeführt. Die Entropie ist ein Maß für die mikroskopische Unordnung im Körper [3]. Ihre zeitliche Änderung ist stets größer gleich dem Quotient der zugeführten Wärme und der absoluten Temperatur  $\theta$ . Somit gilt unter Berücksichtigung der spezifischen Entropie  $s$

$$\dot{S} = \frac{D}{Dt} \int_{\Omega} \rho s \, d\Omega \geq \int_{\Omega} \rho \frac{r}{\theta} \, d\Omega - \int_{\partial\Omega} \frac{\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}}{\theta} \, d(\partial\Omega). \quad (3.15)$$

Für reversible Prozesse entspricht die im Körper produzierte Wärme der durch die Oberfläche des Körpers abfließenden Wärme. Demnach bleibt die Entropie bei reversiblen Prozessen konstant.

Mit Ungl. (3.15) folgt nach Anwendung des Gauß'schen Integralsatzes der 2. Hauptsatz der Thermodynamik in lokaler Form zu

$$\rho \theta \dot{s} \geq \rho r - \nabla \cdot \mathbf{q} + \frac{\nabla \theta \cdot \mathbf{q}}{\theta} . \quad (3.16)$$

Einsetzen des 1. Hauptsatzes der Thermodynamik (3.14) in den 2. Hauptsatz (3.16) ergibt die Clausius-Duhem-Ungleichung in lokaler Form,

$$\rho \theta \dot{s} \geq \rho \dot{e} - \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \frac{\nabla \theta \cdot \mathbf{q}}{\theta} . \quad (3.17)$$

### 3.3.3 Thermodynamische Potentiale

Der 1. Hauptsatz der Thermodynamik setzt die Existenz einer spezifischen inneren Energie voraus. Die spezifische innere Energie besitzt Potentialcharakter, wenn diese eine Funktion der Zustandsvariablen  $\varepsilon$  und  $s$  ist,

$$e = e(\varepsilon, s) . \quad (3.18)$$

Eine thermodynamisch konsistente Beschreibung irreversibler Prozesse wie elastisch-plastisches Verhalten erfordert neben dem Verzerrungstensor  $\varepsilon$  und der spezifischen Entropie  $s$  weitere Variablen, um den energetischen Zustand zu charakterisieren. Laut Coleman & Gurtin [23] bleibt der Potentialcharakter der spezifischen inneren Energie

$$e = e(\varepsilon, s, \boldsymbol{\zeta}) \quad \text{mit} \quad \boldsymbol{\zeta} = [\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n] \quad (3.19)$$

auch bei Berücksichtigung weiterer Zustandsvariablen  $\boldsymbol{\zeta}$  erhalten. Diese können Tensoren beliebiger Stufe sein und werden in der Thermodynamik irreversibler Prozesse [94, 149] als innere Variablen bezeichnet.

Neben der spezifischen inneren Energie existieren weitere Potentiale. So folgt mit der Legendre-Transformation

$$\Psi = e - \frac{\partial e}{\partial s} s = e - \theta s \quad (3.20)$$

die spezifische freie Energie, auch als Helmholtz-Energie bekannt, zu

$$\Psi = \Psi(\varepsilon, \theta, \boldsymbol{\zeta}) \quad \text{mit} \quad \boldsymbol{\zeta} = [\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n] . \quad (3.21)$$

Ferner resultieren durch Vertauschen abhängiger und unabhängiger Variablen aus der Legendre-Transformation  $\rho g = \rho \Psi - \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon} : \varepsilon = \rho \Psi - \boldsymbol{\sigma} : \varepsilon$  bzw.  $h = g - \frac{\partial g}{\partial \theta} \theta = g + s \theta$  die Gibbs-Energie  $g(\boldsymbol{\sigma}, \theta, \boldsymbol{\zeta})$  bzw. die spezifische Enthalpie  $h(\boldsymbol{\sigma}, s, \boldsymbol{\zeta})$ . Zur Überprüfung der thermodynamischen Konsistenz eines Modells sind grundsätzlich alle vorgestellten Potentiale geeignet, wobei Restriktionen für die Materialgleichungen aus der Clausius-Duhem-Ungleichung (3.17) folgen.

### 3.3.4 Folgerungen aus den Hauptsätzen der Thermodynamik

Die Herleitung der Materialgleichungen erfolgt bei thermodynamischer Betrachtung meist auf Grundlage der spezifischen freien Energie  $\Psi$ . Daher ist in der Clausius-Duhem-Ungleichung die spezifische innere Energie  $e$  durch die spezifische freie Energie zu ersetzen. Für die Rate der spezifischen freien Energie gilt unter Berücksichtigung der Legendre-Transformation (3.20)

$$\dot{\Psi} = \frac{\partial \Psi}{\partial \epsilon} : \dot{\epsilon} + \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \dot{\theta} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \Psi}{\partial \zeta_i} \dot{\zeta}_i = \dot{e} - \dot{\theta} s - \theta \dot{s} . \quad (3.22)$$

Mit Gl. (3.22) folgt nach Ablösen von  $\dot{e}$  in der Clausius-Duhem-Ungleichung (3.17)

$$\begin{aligned} \sigma : \dot{\epsilon} - \rho s \dot{\theta} - \rho \dot{\Psi} - \frac{\nabla \theta \cdot \mathbf{q}}{\theta} = \\ (\sigma - \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \epsilon}) : \dot{\epsilon} + \rho (-s - \frac{\partial \Psi}{\partial \theta}) \dot{\theta} - \rho \sum_{i=1}^n \frac{\partial \Psi}{\partial \zeta_i} \dot{\zeta}_i - \frac{\nabla \theta \cdot \mathbf{q}}{\theta} \geq 0 . \end{aligned} \quad (3.23)$$

Da Ungl. (3.23) für beliebige thermodynamische Prozesse zu erfüllen ist und für jeden Ausgangszustand  $\dot{\epsilon}$  und  $\dot{\theta}$  frei wählbar sind, müssen die zugehörigen Vorfaktoren identisch null sein. Demzufolge gilt

$$\sigma = \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \epsilon} , \quad s = - \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} . \quad (3.24)$$

Die Zustandsgleichungen zur Bestimmung des Spannungstensors  $\sigma$  und der spezifischen Entropie  $s$  folgen somit aus dem Potential  $\Psi$ , wobei  $\sigma$  und  $s$  die zum Verzerrungstensor  $\epsilon$  und der absoluten Temperatur  $\theta$  thermodynamisch konjugierten Variablen sind. In Anlehnung hieran erfolgt die Definition der zur inneren Zustandsvariable  $\zeta_i$  thermodynamisch konjugierten Variable

$$\eta_i = \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \zeta_i} \quad \text{für} \quad i = 1, 2, \dots, n . \quad (3.25)$$

Für irreversible Prozesse verbleibt somit die Dissipationsungleichung

$$\Phi = - \sum_{i=1}^n \eta_i \dot{\zeta}_i - \frac{\nabla \theta \cdot \mathbf{q}}{\theta} \geq 0 . \quad (3.26)$$

Die Dissipation  $\Phi$  ist ein Maß für die freigesetzte Energie und setzt sich additiv aus mechanischer und thermischer Dissipation zusammen.

In dieser Arbeit werden rein mechanische Prozesse untersucht. Deshalb entfallen Temperatur und spezifische Entropie als Variablen. Für die Dissipation gilt somit

$$\Phi = - \sum_{i=1}^n \eta_i \dot{\zeta}_i \geq 0 . \quad (3.27)$$

Die Materialgleichungen für die inneren Zustandsvariablen müssen bei rein mechanischen Prozessen der Dissipationsungleichung (3.27) genügen. Zudem folgt hieraus, dass irreversible Zustandsänderungen die spezifische freie Energie nicht erhöhen.

### 3.3.5 Dissipationspotential

Für eine thermodynamisch konsistente Beschreibung irreversibler Prozesse wird die Existenz eines Dissipationspotentials  $\varphi^*$  als skalarwertige Funktion der thermodynamischen Flüsse postuliert. Einen einfacheren Zugang erhält man über die duale Form des Dissipationspotentials  $\varphi$  [88]. Diese folgt durch Vertauschen abhängiger und unabhängiger Variablen aus einer Legendre-Transformation. Das Dissipationspotential

$$\varphi = \varphi(\boldsymbol{\eta}, \nabla\theta) \quad \text{mit} \quad \boldsymbol{\eta} = [\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n] . \quad (3.28)$$

hängt von den zu  $\zeta$  thermodynamisch konjugierten Variablen  $\boldsymbol{\eta}$  und dem Temperaturgradienten  $\nabla\theta$  ab. Die partielle Ableitung des Dissipationspotentials nach  $\nabla\theta$  und  $\boldsymbol{\eta}$  ergibt die thermodynamischen Flüsse

$$\frac{\mathbf{q}}{\theta} = -\frac{\partial\varphi}{\partial(\nabla\theta)}, \quad \dot{\zeta}_i = -\frac{\partial\varphi}{\partial\eta_i} \quad \text{für} \quad i = 1, 2, \dots, n . \quad (3.29)$$

Demnach folgen die Evolutionsgleichungen für die inneren Zustandsvariablen  $\zeta$  aus dem Dissipationspotential. Um dem 2. Hauptsatz der Thermodynamik zu genügen, muss das Dissipationspotential größer gleich null, eine konvexe Funktion und null im Ursprung sein [88].

### 3.4 Klassifizierung von zeitunabhängigem Materialverhalten

In dieser Arbeit erfolgt eine kontinuumsmechanische und somit phänomenologische Beschreibung des zeitunabhängigen Materialverhaltens von Beton. Bei zeitunabhängigem Materialverhalten ist die Materialantwort von der Belastungsgeschwindigkeit unabhängig. Dabei ist entsprechend den in Bild 3.1 dargestellten Spannungs-Dehnungs-Diagrammen zwischen elastischem Materialverhalten, elastisch-plastischem Materialverhalten und Schädigung zu unterscheiden.

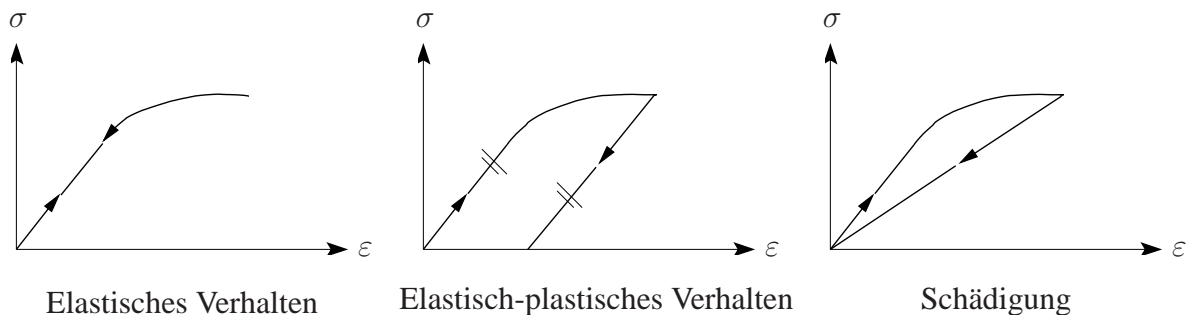


Bild 3.1: Phänomene bei zeitunabhängigem Materialverhalten

Während bei elastischem Materialverhalten Verformungen reversibel sind, treten bei elastisch-plastischem Materialverhalten bleibende, irreversible Verformungen auf.

Schädigung hingegen bewirkt einen Abfall der Anfangssteifigkeit. Bleibende Verformungen sowie der Abfall der Anfangssteifigkeit sind Folgen irreversibler Prozesse im Material, bei denen Energie freigesetzt wird. Da beide Phänomene im Beton stets gemeinsam auftreten, ist eine Kopplung von elastisch-plastischem Materialverhalten und Schädigung erforderlich. Mit Hilfe der Kontinuumsmechanik ist eine konsistente Beschreibung dieses gekoppelten Prozesses möglich.

### 3.5 Modellierung elastischen Materialverhaltens

Viele Werkstoffe weisen zumindest im Bereich geringer Beanspruchung elastisches Materialverhalten auf, das mit Hilfe der Elastizitätstheorie beschreibbar ist. Dabei ist zwischen hypo- und hyperelastischen Modellen zu unterscheiden.

#### Hypoelastizität

Bei hypoelastischen Modellen erfolgt die Beschreibung des funktionalen Zusammenhangs zwischen Spannungen und elastischen Verzerrungen in Ratenform

$$\dot{\sigma} = \mathbf{H}(\sigma, \dot{\epsilon}^{el}) , \quad (3.30)$$

wobei die Spannungsraten  $\dot{\sigma}$  vom Spannungszustand und von den elastischen Verzerrungsraten  $\dot{\epsilon}^{el}$  abhängig sind. Die thermodynamische Konsistenz ist bei hypoelastischen Modellen im Allgemeinen nicht gewährleistet, da unter bestimmten Be- und Entlastungszyklen Energie unzulässig erzeugt wird. Daher erfolgt in dieser Arbeit die Beschreibung des funktionalen Zusammenhangs zwischen Spannungen und elastischen Verzerrungen mit Hilfe eines hyperelastischen Modells.

#### Hyperelastizität

Bei hyperelastischen Modellen folgt die Spannungs-Verzerrungs-Beziehung aus einem elastischen Potential [3]. Somit ist die thermodynamische Konsistenz der Formulierung gewährleistet. Nachfolgend ist das elastische Potential in Form der spezifischen freien Energie für den Fall linearer Elastizität in Symbol- und Indexschreibweise angegeben,

$$\rho \Psi^{el}(\epsilon^{el}) = \frac{1}{2} \epsilon^{el} : \mathbf{C} : \epsilon^{el} = \frac{1}{2} \epsilon_{ij}^{el} C_{ijkl} \epsilon_{kl}^{el} . \quad (3.31)$$

Aus dem Potential (3.31) folgt die Zustandsgleichung, mit der die zum elastischen Verzerrungstensor  $\epsilon^{el}$  thermodynamisch konjugierte Variable, der Spannungstensor

$$\sigma = \rho \frac{\partial \Psi^{el}}{\partial \epsilon^{el}} = \mathbf{C} : \epsilon^{el} , \quad (3.32)$$



definiert ist. Zustandsgleichung (3.32) entspricht dem verallgemeinerten Hooke'schen Gesetz. Alternativ ist eine Formulierung des elastischen Potentials mit Spannungen möglich, was auf die Gibbs-Energie

$$-\rho g^{el}(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{F} : \boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{2} \sigma_{kl} F_{klij} \sigma_{ij} \quad (3.33)$$

führt. Aus der Gibbs-Energie folgt die Zustandsgleichung

$$\boldsymbol{\epsilon}^{el} = -\rho \frac{\partial g^{el}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{F} : \boldsymbol{\sigma} . \quad (3.34)$$

Der Nachgiebigkeitstensor  $\mathbf{F}$  bzw. der Elastizitätstensor  $\mathbf{C} = \mathbf{F}^{-1}$  beschreibt den funktionalen Zusammenhang zwischen Spannungen und elastischen Verzerrungen. Beide Materialtensoren sind positiv definit und besitzen folgende Symmetrieeigenschaften,

$$F_{klij} = F_{lkij} = F_{klji} = F_{ijkl} , \quad C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{ijlk} = C_{klij} , \quad (3.35)$$

die aus der Symmetrie des Spannungs- und des elastischen Verzerrungstensors sowie aus der Integrabilitätsbedingung

$$\rho \frac{\partial^2 g^{el}}{\partial \sigma_{kl} \partial \sigma_{ij}} = \rho \frac{\partial^2 g^{el}}{\partial \sigma_{ij} \partial \sigma_{kl}} \Rightarrow F_{klij} = F_{ijkl} \quad (3.36)$$

resultieren. Somit enthalten die Materialtensoren für den Fall allgemeiner Anisotropie 21 unabhängige Komponenten [143]. Für den Fall isotropen Materialverhaltens hingegen sind sämtliche Komponenten mit den beiden Lamé'schen Konstanten  $\lambda$  und  $\mu$  bzw. mit dem Elastizitätsmodul  $E$  und der Querdehnzahl  $\nu$  bestimmt.

### 3.6 Modellierung inelastischen Materialverhaltens

Mit der Elastizitätstheorie sind lediglich reversible Verformungsprozesse beschreibbar. Bei Beton treten jedoch infolge von Rissbildung und -wachstum neben reversiblen auch irreversible Verformungen auf, deren Beschreibung mit der Plastizitätstheorie möglich ist. Dabei ist zwischen der Deformations- und der Fließtheorie zu unterscheiden. Während die Deformationstheorie [55] (Hencky-Plastizität) einen funktionalen Zusammenhang zwischen absoluten Verzerrungen und Spannungen beschreibt, ist in der Fließtheorie [124] die Spannungs-Verzerrungs-Beziehung in Ratenform formuliert. Die Deformationstheorie führt allerdings nur bei Beanspruchungen mit zeitunveränderlichem Belastungspfad zu plausiblen Ergebnissen [113]. Aufgrund dieses entscheidenden Nachteils erfolgt die Materialmodellierung hier mit Hilfe der Fließtheorie.

Obwohl Beton als spröder Werkstoff im Vergleich zu Stahl kein ausgeprägtes plastisches Fließen aufweist, ist das Verformungsverhalten von Beton mit Hilfe von Plastizitätsmodellen phänomenologisch beschreibbar. Materialmodelle auf Grundlage der Fließtheorie wurden u. a. von Feenstra & de Borst [44] sowie Meschke et al. [98] erfolgreich auf Beton angewendet.



### 3.6.1 Materialgleichungen

Die zur Beschreibung elastisch-plastischen Materialverhaltens erforderlichen Materialgleichungen umfassen Zustandsgleichungen, Fließbedingung, Fließregel sowie weitere Evolutionsgleichungen. Restriktionen für die Materialgleichungen resultieren aus dem Postulat von Drucker bzw. den Hauptsätzen der Thermodynamik.

Unter der Voraussetzung kleiner Deformationen ist eine additive Zerlegung der Verzerrungen in einen elastischen und einen inelastischen Anteil möglich,

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^{el} + \boldsymbol{\varepsilon}^{pl} . \quad (3.37)$$

Mit den elastischen Verzerrungen und den inneren Zustandsvariablen erfolgt die Definition der spezifischen freien Energie

$$\Psi(\boldsymbol{\varepsilon}^{el}, \boldsymbol{\zeta}) = \Psi^{el}(\boldsymbol{\varepsilon}^{el}) + \Psi^{pl}(\boldsymbol{\zeta}) \quad \text{mit} \quad \boldsymbol{\zeta} = [\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n] . \quad (3.38)$$

Allerdings ist dessen additive Zerlegung in einen elastischen und einen inelastischen Anteil laut Lubliner [92] nur dann gestattet, wenn eine Unterteilung der Verzerrungen entsprechend Gl. (3.37) erfolgt. Partielles Ableiten der spezifischen freien Energie nach der inneren Zustandsvariable  $\zeta_i$  ergibt die Zustandsgleichung

$$\eta_i = \rho \frac{\partial \Psi(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}^{pl}, \boldsymbol{\zeta})}{\partial \zeta_i} = \rho \frac{\partial \Psi^{pl}(\boldsymbol{\zeta})}{\partial \zeta_i} = h_i(\boldsymbol{\zeta}) \quad \text{für} \quad i = 1, 2, \dots, n , \quad (3.39)$$

welche die zu  $\zeta_i$  thermodynamisch konjugierte Variable definiert. Aus dem elastischen Anteil  $\Psi^{el}$  der spezifischen freien Energie folgt entsprechend Gl. (3.32) die Spannungs-Verzerrungs-Beziehung. Ferner wird die Existenz eines Dissipationspotentials

$$\varphi = \varphi(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\eta}) \quad \text{mit} \quad \boldsymbol{\eta} = [\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n] \quad (3.40)$$

postuliert, aus dem die Fließregel und die weiteren Evolutionsgleichungen folgen.

Bei mehraxialer Beanspruchung sind zur Beschreibung elastisch-plastischen Materialverhaltens Fließhypothesen erforderlich. Fließhypothesen sind skalarwertige Funktionen der Spannungen oder Verzerrungen und können zudem von inneren Variablen abhängen. Demnach ist zwischen einer spannungsabhängigen Formulierung im Raum der thermodynamischen Kräfte und einer verzerrungsabhängigen Formulierung zu unterscheiden. Im Rahmen dieser Arbeit ist die in der Plastizitätstheorie geläufigere spannungsabhängige Formulierung gewählt. Dabei ist anhand einer Fließbedingung

$$F = F(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\eta}) \leq 0 \quad \text{mit} \quad \boldsymbol{\eta} = [\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n] \quad (3.41)$$

zu entscheiden, ob ein mehraxialer Spannungszustand zu elastischen oder elastisch-plastischen Verzerrungen führt. Im dreidimensionalen Raum der Hauptspannungen beschreibt die Fließbedingung eine konvexe Fläche, die als Fließfläche bezeichnet wird

und den Bereich elastischen Materialverhaltens eingrenzt. Für Spannungszustände innerhalb der Fließfläche  $F < 0$  ist das Materialverhalten elastisch, Spannungszustände außerhalb der Fließfläche  $F > 0$  sind dagegen unzulässig. Erreicht der Spannungspfad die Fließfläche  $F = 0$ , so führt ein weiterer Anstieg der Belastung zu Spannungsumlagerungen und plastischen Verzerrungen. Die Rate der plastischen Verzerrungen, auch als plastischer Fluss bezeichnet, ist mit der Fließregel

$$\dot{\epsilon}^{pl} = \frac{\partial \varphi(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\eta})}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \dot{\lambda} = \mathbf{m}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\eta}) \dot{\lambda} \quad (3.42)$$

bestimmt. Desweiteren folgen aus dem Dissipationspotential die Evolutionsgleichungen für die inneren Zustandsvariablen  $\zeta$ ,

$$\dot{\zeta}_i = -\frac{\partial \varphi(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\eta})}{\partial \eta_i} \dot{\lambda} = -g_i(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\eta}) \dot{\lambda} \quad \text{für} \quad i = 1, 2, \dots, n . \quad (3.43)$$

Die Rate des plastischen Multiplikators  $\dot{\lambda}$  bestimmt sowohl die Evolution der plastischen Verzerrungen als auch die Evolution der inneren Zustandsvariablen und entspricht in der Optimierungstheorie dem Lagrange'schen Multiplikator. Während bei elastisch-plastischen Verzerrungszuwächsen  $\dot{\lambda}$  stets größer null und die Fließbedingung  $F$  identisch null ist, gilt für rein elastische Verzerrungszuwächse  $\dot{\lambda} = 0$  und  $F < 0$ . Somit nehmen die Be- und Entlastungsbedingungen, die auch als Kuhn-Tucker-Bedingungen bekannt sind [135], folgende Form an

$$\dot{\lambda} \geq 0 , \quad F \leq 0 , \quad \dot{\lambda} F = 0 . \quad (3.44)$$

Aus der Forderung, dass die Fließbedingung während des Fließens zu erfüllen ist, folgt die Konsistenzbedingung

$$\dot{F} = \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial \eta_i} \dot{\eta}_i = 0 . \quad (3.45)$$

Oft erfolgt die Formulierung der Evolutions- und Zustandsgleichungen aus der Anschauung aufgrund experimenteller Beobachtungen. In diesem Fall folgen  $\mathbf{m}$ ,  $g_i$  und  $h_i$  nicht aus einem Potential, sondern werden direkt vorgegeben, so dass erst eine nachträgliche Herleitung der übergeordneten Potentiale die Überprüfung der thermodynamischen Konsistenz ermöglicht.

Mit dem verallgemeinerten Hooke'schen Gesetz (3.32) sowie Gl. (3.37) und (3.42) folgen bei konstantem Elastizitätstensor  $\mathbf{C}$  die Spannungsrate zu

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C} : (\dot{\boldsymbol{\epsilon}} - \dot{\epsilon}^{pl}) = \mathbf{C} : (\dot{\boldsymbol{\epsilon}} - \mathbf{m} \dot{\lambda}) . \quad (3.46)$$

Unter Berücksichtigung von Gl. (3.43) gilt

$$\dot{\eta}_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \eta_i}{\partial \zeta_j} \dot{\zeta}_j = - \sum_{j=1}^n \frac{\partial \eta_i}{\partial \zeta_j} g_j(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\eta}) \dot{\lambda} \quad \text{für} \quad i = 1, 2, \dots, n . \quad (3.47)$$

Nach Einsetzen von  $\dot{\sigma}$  und  $\dot{\eta}_i$  in die Konsistenzbedingung (3.45) folgt

$$\dot{\lambda} = \frac{\frac{\partial F}{\partial \sigma} : C : \dot{\epsilon}}{\frac{\partial F}{\partial \sigma} : C : m + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial F}{\partial \eta_i} \frac{\partial \eta_i}{\partial \zeta_j} g_j} . \quad (3.48)$$

Ablösen von  $\dot{\lambda}$  in Gl. (3.46) ergibt schließlich den direkten funktionalen Zusammenhang zwischen Spannungs- und Verzerrungsraten,

$$\dot{\sigma} = \left( C - \frac{C : m \otimes \frac{\partial F}{\partial \sigma} : C}{\frac{\partial F}{\partial \sigma} : C : m + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial F}{\partial \eta_i} \frac{\partial \eta_i}{\partial \zeta_j} g_j} \right) : \dot{\epsilon} = C^{tan} : \dot{\epsilon} . \quad (3.49)$$

Der Steifigkeitstensor  $C^{tan}$  entspricht der tangentialen Steifigkeit am materiellen Punkt und ist im Allgemeinen unsymmetrisch. Wie aus der Ratenform der Spannungs-Verzerrungs-Beziehung (3.49) ersichtlich, folgt nur bei Verwendung einer assoziierten Fließregel  $m = \partial \varphi / \partial \sigma = \partial F / \partial \sigma$  ein symmetrischer Steifigkeitstensor.

Eine assoziierte Fließregel kann allerdings bei kohäsiven Reibungsmaterialien zu einer Fehleinschätzung der Volumenänderung führen, wobei das Fehlverhalten vor allem bei mehraxialer Druckbeanspruchung auftritt [119]. Daher erfolgt die Materialmodellierung häufig mit Hilfe einer nicht-assozierten Fließregel, die jedoch nicht konform mit dem Postulat von Drucker und dem Prinzip der maximalen Dissipation ist.

### 3.6.2 Verfestigungshypothesen

Die Fließbedingung, bestehend aus einer Vergleichs- und einer Fließspannung, dient der Charakterisierung des Materialverhaltens. Eine Erhöhung der Fließspannung infolge plastischer Verzerrungen wird als Verfestigung, eine Abminderung als Entfestigung bezeichnet. Die Fließspannung beeinflusst die Fließfläche, deren Größe, Lage und Form im Allgemeinen von der Belastungsgeschichte abhängt. Verfestigungshypothesen beschreiben diese Modifikationen mit Hilfe innerer Variablen, wobei zwischen isotroper, kinematischer und formativer Verfestigung zu unterscheiden ist, vergleiche Bild 3.2.

Eine gleichmäßige Aufweitung der Fließfläche charakterisiert isotrop verfestigendes Materialverhalten und wird als isotrope Verfestigung bezeichnet, wobei Lage und Form der Fließfläche erhalten bleiben. Kinematische Verfestigung hingegen bewirkt ausschließlich eine Translation und formative Verfestigung ausschließlich eine Formänderung der Fließfläche. Mittels kinematischer Verfestigung erfolgt beispielsweise die Beschreibung des Bauschinger-Effekts, der bei zyklischer Beanspruchung von Metallen auftritt. Kinematische und formative Verfestigung beschreiben anisotropes Materialverhalten und werden daher unter dem Begriff anisotrope Verfestigung zusammengefasst. Anisotrope Verfestigungshypothesen sind z. B. in [146] ausführlich diskutiert.

In der vorliegenden Arbeit erfolgt die Modellierung des Materialverhaltens mit Hilfe einer isotropen Verfestigungshypothese. Auswirkungen anisotropen Materialverhaltens infolge von Rissbildung und -wachstum werden über effektive Spannungen berücksichtigt, welche die nominalen Spannungen in der Fließbedingung ersetzen. Während im Raum der effektiven Spannungen die Form der Fließfläche erhalten bleibt, ist im Raum der nominalen Spannungen die Form der Fließfläche veränderlich. Dieses Vorgehen entspricht einer formativen Entfestigung.

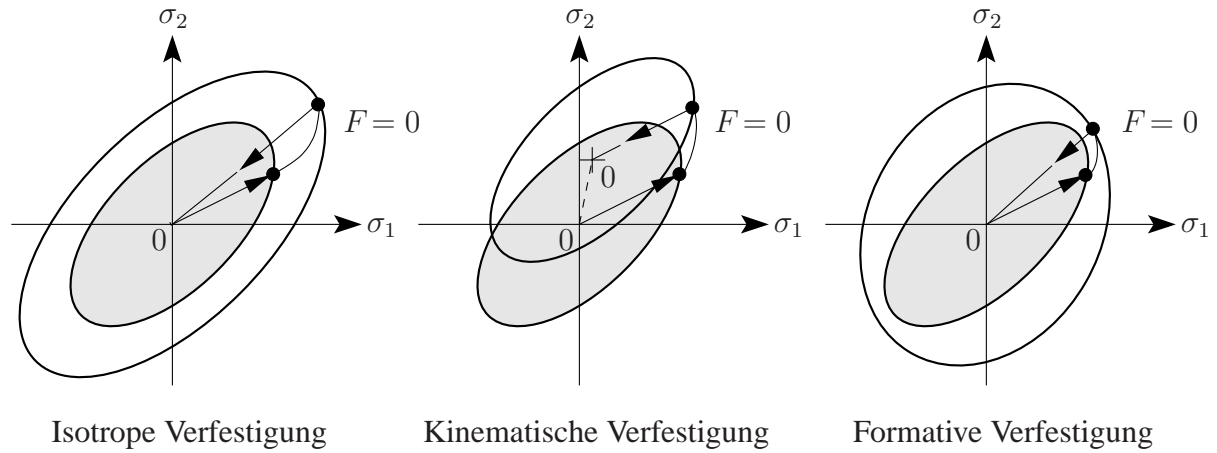


Bild 3.2: Verfestigungshypothesen im Raum der Hauptspannungen

Für die Fließbedingung gilt bei isotroper Verfestigung

$$F(\boldsymbol{\sigma}, \eta_1) = \sigma_V(\boldsymbol{\sigma}) - \sigma_F(\eta_1) \leq 0. \quad (3.50)$$

Demnach ist anhand der Vergleichsspannung  $\sigma_V$  und der Fließspannung  $\sigma_F$  zu entscheiden, ob infolge einer Beanspruchung elastische oder elastisch-plastische Verzerrungen auftreten. Bei isotroper Verfestigung hängt die Fließspannung von der inneren Variable  $\eta_1$  ab. Diese ist eine skalarwertige Funktion der plastischen Verzerrungen und wird daher als plastische Vergleichsverzerrung bezeichnet. Zur Abbildung des räumlichen plastischen Verzerrungszustands auf die skalare Größe  $\eta_1$  sind sowohl die Dehnungs- als auch die Arbeitsverfestigungshypothese geeignet [72, 135].

Bei der Dehnungsverfestigungshypothese folgt die plastische Vergleichsverzerrungsrate

$$\dot{\epsilon}_V^{pl} = \dot{\eta}_1 = c \sqrt{\dot{\epsilon}^{pl} : \dot{\epsilon}^{pl}} \quad (3.51)$$

unmittelbar aus der plastischen Verzerrungsrate  $\dot{\epsilon}^{pl}$ . Der Skalierungsfaktor  $c$  dient zur Anpassung der plastischen Vergleichsverzerrung an die plastische Verzerrung bei einaxialer Beanspruchung. Bei der Arbeitsverfestigungshypothese hingegen ist  $\dot{\epsilon}_V^{pl}$  über die Dissipationsarbeit definiert. Ein Vergleich der Dissipationsarbeit des mehrdimensionalen Zustands mit der Dissipationsarbeit des eindimensionalen Vergleichszustands ergibt

$$\boldsymbol{\sigma} : \dot{\epsilon}^{pl} = \sigma_V \dot{\epsilon}_V^{pl}. \quad (3.52)$$

Dehnungs- und Arbeitsverfestigungshypothese bestimmen lediglich die Rate der plastischen Vergleichsverzerrung. Der Absolutwert folgt nach Integration über  $\dot{\varepsilon}_V^{pl}$  zu

$$\varepsilon_V^{pl} = \int_0^t \dot{\varepsilon}_V^{pl} dt, \quad (3.53)$$

wobei  $\varepsilon_V^{pl}$  die zur Vergleichsspannung energetisch konjugierte Variable ist.

### 3.6.3 Festigkeitshypothesen

Plastizitätsmodelle hängen maßgeblich von der Definition der Vergleichsspannung ab. Die Abbildung des räumlichen Spannungszustands auf die skalare Vergleichsspannung erfolgt mit Hilfe einer Festigkeitshypothese [62], die entweder mit den Invarianten  $I_1$ ,  $J_2$  bzw.  $J_2^D$  und  $J_3$  des Spannungstensors  $\boldsymbol{\sigma}$  oder den Hauptspannungen  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$  formuliert ist. Im Folgenden sind einige der bekanntesten Festigkeitshypothesen und deren wesentlichen Charakteristiken erläutert.

Materialien, deren inelastisches Verhalten nahezu unabhängig vom hydrostatischen Anteil  $I_1$  der Spannungen ist, sind mit der Festigkeitshypothese nach Tresca [148] (Schubspannungshypothese) oder von Mises [151] (Gestaltänderungshypothese) adäquat beschreibbar. Ihre Anwendung erfolgt vorwiegend bei Materialien wie Metallen, die auf Mikroebene eine Gitterstruktur mit ausgewiesenen Gleitebenen aufweisen. Während bei metallischen Werkstoffen die aufnehmbare Zug- und Druckspannung nahezu identisch sind, weisen Zug- und Druckfestigkeit bei kohäsiven Reibungsmaterialien wie Beton aufgrund innerer Reibung deutliche Unterschiede auf. Folglich ist der hydrostatische Anteil der Spannungen zu berücksichtigen. Zu den vom hydrostatischen Anteil abhängigen Vergleichsspannungskriterien gehören die Festigkeitshypothesen von Mohr-Coulomb [101], Drucker-Prager [35] und Rankine [121] (Hauptspannungshypothese), wobei das Rankine-Kriterium häufig zur Beschreibung des Materialverhaltens bei Zugbeanspruchung verwendet wird. Die aus den verschiedenen Festigkeitshypothesen resultierenden Fließbedingungen sind in Tabelle 3.1 gegenübergestellt. Bei entsprechender Wahl des Modellparameters  $a$  folgt aus dem Kriterium von Mohr-Coulomb bzw. Drucker-Prager das Kriterium von Tresca bzw. von Mises.

	Fließbedingung: $\sigma_V(\boldsymbol{\sigma}) - \sigma_F \leq 0$
Tresca	$(\sigma_1 - \sigma_3)/2 - \sigma_F \leq 0$
Mohr-Coulomb	$a (\sigma_1 + \sigma_3)/2 + (\sigma_1 - \sigma_3)/2 - \sigma_F \leq 0$
von Mises	$\sqrt{J_2^D(\boldsymbol{\sigma})} - \sigma_F \leq 0$
Drucker-Prager	$a I_1(\boldsymbol{\sigma}) + \sqrt{J_2^D(\boldsymbol{\sigma})} - \sigma_F \leq 0$
Rankine	$\sigma_1 - \sigma_F \leq 0$

Tabelle 3.1: Spannungsabhängige Fließbedingungen

Bild 3.3 zeigt die Fließfläche des von Mises- sowie des Drucker-Prager-Kriteriums im Raum des Deviators und der Invarianten. Der Einfluss des hydrostatischen Anteils  $I_1$  der Spannungen auf die Fließfläche ist beim Drucker-Prager-Kriterium deutlich zu erkennen. Das von Mises-Kriterium hingegen ist hiervon unabhängig, so dass bei Verwendung einer assoziierten Fließregel der Richtungsvektor  $\mathbf{m}$  der plastischen Verzerrungsrate zur hydrostatischen Achse  $I_1$  orthogonal ist. Folglich resultieren aus dem von Mises-Kriterium volumenkonstante plastische Verzerrungen.

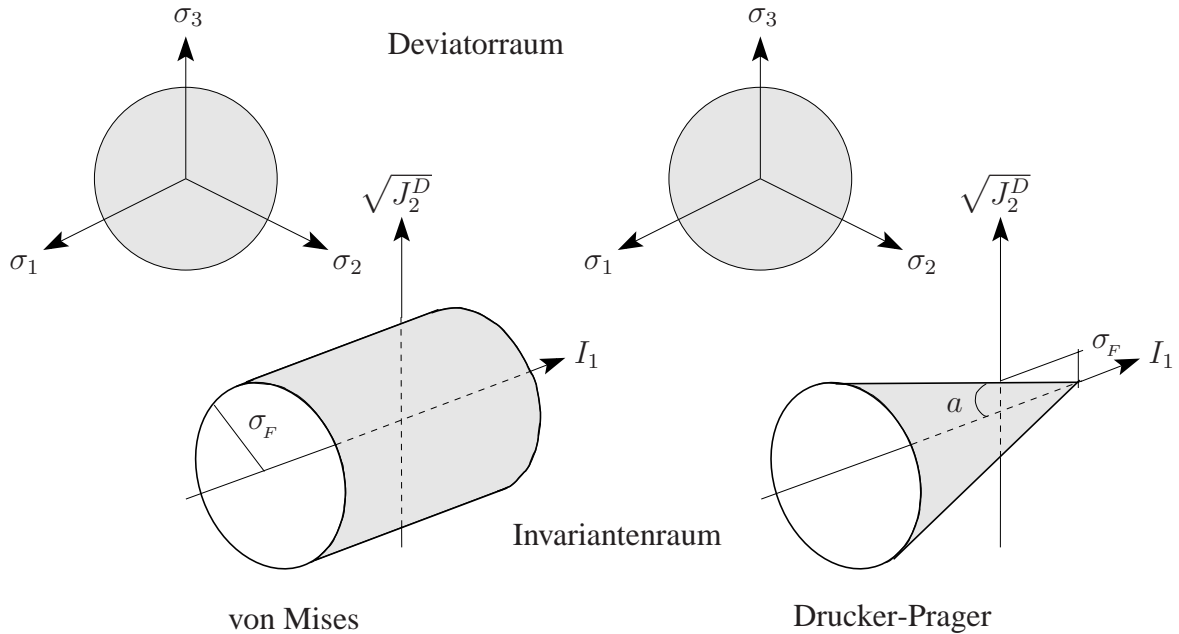


Bild 3.3: Geometrische Interpretation der Fließbedingungen

Mit der Festigkeitshypothese von Drucker-Prager bzw. Rankine ist das Verformungsverhalten von Beton lediglich bei Druck- bzw. Zugbeanspruchung adäquat beschreibbar. Daher wurden u. a. von Ottosen [111] und Willam & Warnke [158] Festigkeitshypothesen entwickelt, die für sämtliche Beanspruchungskombinationen gelten. Festigkeitshypothesen für Beton sind z. B. in [21] ausführlich diskutiert. In dieser Arbeit erfolgt die Modellierung des Verformungsverhaltens im Rahmen der Mehrflächenplastizität mit Hilfe des Drucker-Prager-Kriteriums und eines modifizierten Rankine-Kriteriums.

### 3.6.4 Mehrflächenplastizität

In der Mehrflächenplastizität charakterisieren mehrere Fließbedingungen

$$F_j = F_j(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\eta}) \leq 0 \quad \text{für} \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (3.54)$$

das Materialverhalten. Die daraus resultierende Fließfläche besteht aus mehreren Teilflächen, deren Übergänge stetig, aber im Allgemeinen nicht stetig differenzierbar sind.

Folglich sind in den Übergängen die plastischen Verzerrungsraten nicht definiert. Eine eindeutige Bestimmung der plastischen Verzerrungsraten ist mit Hilfe der Koiter'schen Fließregel [75] möglich,

$$\dot{\epsilon}^{pl} = \sum_{j=1}^m \frac{\partial \varphi_j(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\eta})}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \dot{\lambda}_j = \sum_{j=1}^m \mathbf{m}_j(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\eta}) \dot{\lambda}_j . \quad (3.55)$$

In der Einflächenplastizität dagegen ist die Fließfläche häufig im gesamten Definitionsbereich stetig differenzierbar, was unter numerischen Aspekten von Vorteil ist. Der große Vorteil der Mehrflächenplastizität besteht jedoch darin, dass für unterschiedliche Spannungszustände verschiedene Fließbedingungen gelten. Deshalb betreffen Modifikationen einer Fließbedingung im Gegensatz zur Einflächenplastizität nur Teilbereiche der Fließfläche. Das unterschiedliche Materialverhalten von Beton unter Zug- und Druckbeanspruchung ist somit leicht zu erfassen.

### 3.6.5 Postulat von Drucker

Das Postulat von Drucker liefert Restriktionen für die Materialgleichungen und ist für Kreisprozesse im Spannungsraum formuliert. Ein Kreisprozess beschreibt einen Vorgang, bei dem Ausgangs- und Endzustand einer betrachteten Größe nach Be- und Entlastung identisch sind. Laut dem Postulat von Drucker

$$\oint_{\boldsymbol{\sigma}} (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_A) : d\boldsymbol{\epsilon} \geq 0 \quad (3.56)$$

ist für jeden beliebigen Kreisprozess im Spannungsraum die geleistete Arbeit infolge einer Spannungsänderung stets größer gleich null. Dabei kennzeichnet  $\boldsymbol{\sigma}_A$  einen im Gleichgewicht befindlichen Ausgangszustand. Aus dem Postulat von Drucker (3.56) folgt unter Berücksichtigung von Gl. (3.37)

$$\oint_{\boldsymbol{\sigma}} (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_A) : d\boldsymbol{\epsilon}^{el} + \oint_{\boldsymbol{\sigma}} (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_A) : d\boldsymbol{\epsilon}^{pl} \geq 0 . \quad (3.57)$$

Der 1. Term von Ungl. (3.57) ist bei hyperelastischem Materialverhalten identisch null. Für den 2. Term gilt

$$(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_A) : d\boldsymbol{\epsilon}^{pl} \geq 0 , \quad (3.58)$$

da Ungl. (3.57) für beliebige Kreisprozesse im Spannungsraum zu erfüllen ist [72, 135]. Zudem folgt für eine differentielle Änderung  $d\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_A$  des Ausgangszustands aus Ungl. (3.58) die Drucker'sche Stabilitätsbedingung

$$d\boldsymbol{\sigma} : d\boldsymbol{\epsilon}^{pl} \geq 0 , \quad (3.59)$$

mit der die materielle Stabilität bewertet werden kann. Demnach gilt ein Materialzustand als stabil, solange das doppelte Skalarprodukt der Differentiale von Spannungen



und plastischen Verzerrungen größer null ist. Ein negatives Skalarprodukt hingegen kennzeichnet einen instabilen Materialzustand. Weitere Kriterien zur Bewertung der materiellen Stabilität stammen von Hill [57] und Il'iusin [60].

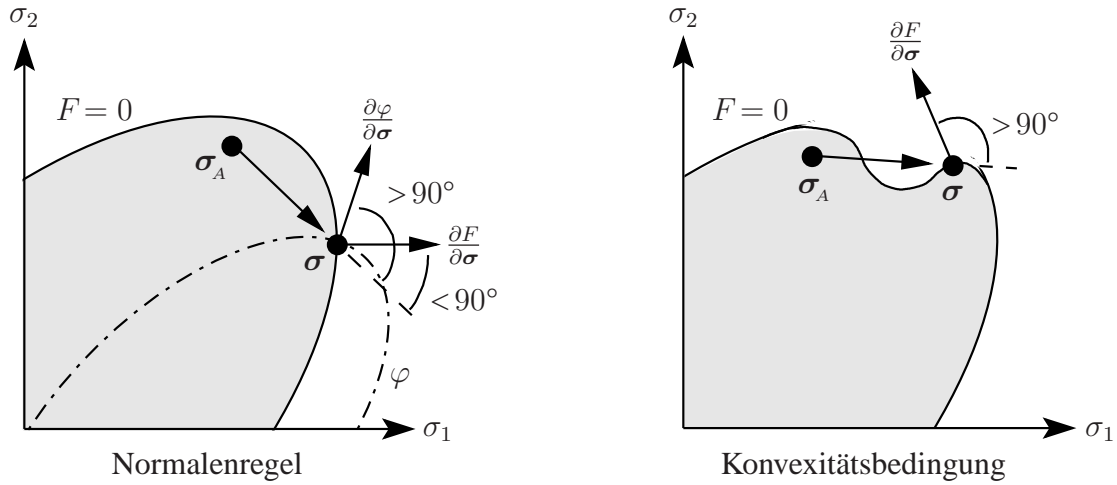


Bild 3.4: Interpretationen des Drucker'schen Postulats

Zur Erfüllung des Postulats von Drucker (3.56) sind zwei Bedingungen einzuhalten; die Konvexität der Fließfläche (Konvexitätsbedingung) und die Anwendung einer assoziierten Fließregel  $\mathbf{m} = \partial\varphi/\partial\boldsymbol{\sigma} = \partial F/\partial\boldsymbol{\sigma}$  (Normalenregel). Eine anschauliche Interpretation des Drucker'schen Postulats ist bei Betrachtung des Winkels zwischen dem Vektor des Spannungszinkrements  $\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_A$  und dem Richtungsvektor  $\partial\varphi/\partial\boldsymbol{\sigma}$  bzw.  $\partial F/\partial\boldsymbol{\sigma}$  der plastischen Verzerrungsrate möglich, wie Bild 3.4 verdeutlicht. Um dem Drucker'schen Postulat zu genügen, darf der Winkel zwischen beiden Vektoren nie größer als  $90^\circ$  sein, da sonst deren Skalarprodukt und damit die Dissipation negativ wird.

### 3.6.6 Prinzip der maximalen Dissipation

Formal ist eine Herleitung der Materialgleichungen zur Beschreibung elastisch-plastischen Materialverhaltens im Rahmen einer thermodynamischen Betrachtung mit Hilfe des Prinzips der maximalen Dissipation möglich. Nach dem Prinzip der maximalen Dissipation entspricht von allen zulässigen Materialzuständen derjenige dem aktuellen Zustand, für den die Dissipation einen Extremwert annimmt [56]. Aus dem Prinzip der maximalen Dissipation resultiert eine Extremwertaufgabe mit Nebenbedingung, die in mathematischer Hinsicht als Optimierungsaufgabe zu interpretieren ist.

Die spezifische freie Energie (3.38) ist bei elastisch-plastischem Materialverhalten unter Berücksichtigung von Gl. (3.31) und (3.37) definiert zu

$$\rho \Psi(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}^{pl}, \boldsymbol{\zeta}) = \frac{1}{2} (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^{pl}) : \mathbf{C} : (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^{pl}) + \rho \Psi^{pl}(\boldsymbol{\zeta}) . \quad (3.60)$$



Partielles Ableiten des Potentials (3.60) nach den Zustandsvariablen ergibt die Zustandsgleichungen, mit denen die thermodynamisch konjugierten Variablen

$$\boldsymbol{\sigma} = \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{C} : (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^{pl}) , \quad \boldsymbol{\sigma} = -\rho \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^{pl}} = \mathbf{C} : (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^{pl}) , \quad \eta_i = \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \zeta_i} \quad (3.61)$$

bestimmt sind. Der Spannungstensor  $\boldsymbol{\sigma}$  ist damit die zum plastischen Verzerrungstensor  $\boldsymbol{\varepsilon}^{pl}$  und die zum Gesamtverzerrungstensor  $\boldsymbol{\varepsilon}$  thermodynamisch konjugierte Variable.

Für rein mechanische Prozesse folgt mit Ungl. (3.23) bzw. (3.27) die Dissipation zu

$$\Phi = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \rho \dot{\Psi} = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{pl} - \sum_{i=1}^n \eta_i \dot{\zeta}_i \geq 0 . \quad (3.62)$$

Das Prinzip der maximalen Dissipation fordert unter Einhaltung der Fließbedingung (3.41) und der Kuhn-Tucker-Bedingungen (3.44), dass die Dissipation einen Extremwert annimmt. Mit der Fließbedingung als Nebenbedingung, die entsprechend der Optimierungstheorie über einen Lagrange'schen Multiplikator  $\dot{\lambda}$  im Funktional  $L$  berücksichtigt ist, lautet die zu lösende Extremwertaufgabe [145]

$$L(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\eta}, \dot{\lambda}) = -\Phi(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\eta}) + \dot{\lambda} F(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\eta}) = -\boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{pl} + \sum_{i=1}^n \eta_i \dot{\zeta}_i + \dot{\lambda} F \rightarrow \text{stat.} \quad (3.63)$$

Für die Extremwerte des Funktional gilt

$$\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{0} = -\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{pl} + \dot{\lambda} \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} , \quad \frac{\partial L}{\partial \eta_i} = 0 = \dot{\zeta}_i + \dot{\lambda} \frac{\partial F}{\partial \eta_i} , \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{\lambda}} = 0 = F . \quad (3.64)$$

Aus dem Prinzip der maximalen Dissipation folgt, ebenso wie beim Postulat von Drucker, die Konvexität der Fließfläche (Konvexitätsbedingung) und eine assoziierte Fließregel  $\mathbf{m} = \partial \varphi / \partial \boldsymbol{\sigma} = \partial F / \partial \boldsymbol{\sigma}$  (Normalenregel). Darüber hinaus resultieren die Evolutionsgleichungen für die inneren Zustandsvariablen  $\zeta$  aus der Fließbedingung. Somit gilt für sämtliche Evolutionsgleichungen die Normalenregel. Dissipationspotential und Fließbedingung sind in diesem Fall identisch. Das Prinzip der maximalen Dissipation liefert daher weitergehende Restriktionen als das Postulat von Drucker.

### 3.7 Modellierung von Schädigung

Untersuchungen an Betonprüfkörpern zeigen, dass insbesondere im Nachbruchbereich ein deutlicher Abfall der Anfangssteifigkeit zu beobachten ist. Der Steifigkeitsabfall ist charakteristisch für Schädigung, deren phänomenologische Beschreibung mit Hilfe der Kontinuumsschädigungsmechanik erfolgt.

Schädigungsprozesse finden auf unterschiedlichen Skalen statt. Auf Mikroebene initiieren Spannungskonzentrationen an Einschlüssen oder inneren Grenzschichten zunächst

die Bildung von Mikrorissen. Das damit einhergehende Versagen atomarer Bindungen beeinflusst hauptsächlich die elastischen Materialeigenschaften und ist die Ursache für den Steifigkeitsabfall im Beton. Erst mit dem Zusammenwachsen der Mikrorisse entstehen makroskopisch sichtbare Risse. Während Schädigung auf Mikroebene adäquat mit Hilfe von Kontinuumsmodellen beschreibbar ist, sind zur Modellierung des diskontinuierlichen Versagensmechanismus auf Makroebene eher bruchmechanische Modelle geeignet. Die kontinuumsmechanische Beschreibung makroskopischer Risse stellt demnach eine Näherung dar. Vorteil der kontinuumsmechanischen Modellierung ist jedoch ihre Effizienz bei Kopplung von elastisch-plastischem Materialverhalten und Schädigung. Zudem erfolgt so eine konsistente Beschreibung des auf unterschiedlichen Skalen stattfindenden Schädigungsprozesses.

In der Kontinuumschädigungsmechanik erfolgt die Modellierung von Schädigungsprozessen mit Hilfe von Schädigungsvariablen. Diese charakterisieren den Degradationszustand des Materials und können Skalare [54, 70, 87], Vektoren [71, 76, 91] oder Tensoren 2. Stufe [20, 33, 102], 4. Stufe [19, 22, 25, 154] bzw. 8. Stufe [19] sein. Einen Überblick über in der Literatur verwendete Schädigungsvariablen geben Skrzypek & Ganczarski [139]. Zümmendorf [167] bewertet darüber hinaus unterschiedliche Definitionen für Schädigungsvariablen hinsichtlich ihrer physikalischen Plausibilität.

Im Beton bewirken Rissbildung und -wachstum anisotrope Schädigung. Zur Modellierung anisotroper Schädigung sind weder Skalare noch Vektoren geeignet, da diese den Einfluss richtungsabhängiger Degradationsprozesse auf das Materialverhalten nicht erfassen können. Die Beschreibung anisotroper Schädigung erfordert somit mindestens Schädigungstensoren 2. Stufe.

In dieser Arbeit erfolgt die Modellierung anisotroper Schädigung mit Hilfe eines Schädigungstensors 4. Stufe. Zur Beschreibung des Materialverhaltens unter Druckbeanspruchung ist ferner eine skalare Schädigungsvariable im Modell berücksichtigt.

### 3.7.1 Konzept der effektiven Spannungen

In Anlehnung an Kachanov [70] ist eine anschauliche Definition der Schädigungsvariable möglich. Die Schädigungsvariable stellt laut Kachanov ein Maß für den Anteil von Defekten in einer Querschnittsfläche eines Körpers dar.

Entsprechend Bild 3.5 wird die Querschnittsfläche des Körpers mit  $A$ , die der Defekte mit  $A_D$  und die der Matrix mit  $A_M$  bezeichnet. Die skalare Schädigungsvariable

$$D = \frac{A_D}{A} \quad \text{mit} \quad A_D = A - A_M \quad (3.65)$$

beschreibt die Reduktion des tragenden Querschnitts. Für den ungeschädigten Körper ist  $D = 0$ . Bei vollständiger Schädigung hingegen ist  $D = 1$ .

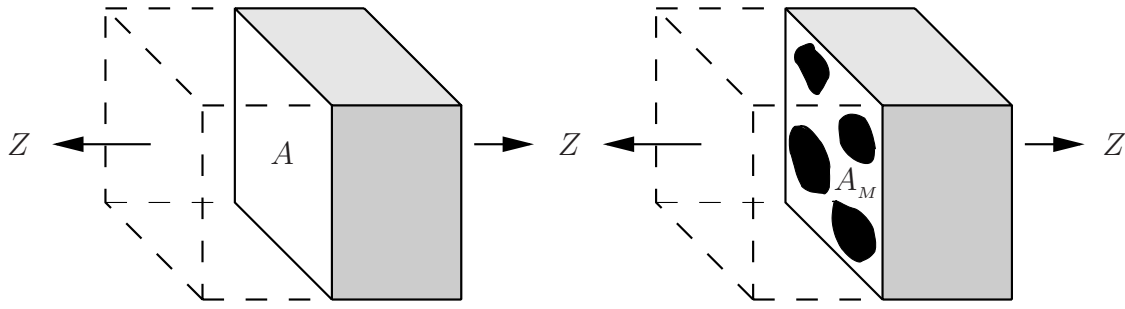


Bild 3.5: Körper im ungeschädigten und geschädigten Zustand

Anfang der 1960er Jahre formuliert Rabotnov [120] das Konzept der effektiven Spannungen. Diese charakterisieren die erhöhte Materialbeanspruchung im geschwächten Querschnitt. Unter der Annahme, dass nur die Querschnittsfläche der Matrix zur Lastübertragung zur Verfügung steht, gilt für einaxiale Beanspruchung

$$\tilde{\sigma} = \frac{Z}{A_M} = \frac{1}{1-D} \frac{Z}{A} = (1-D)^{-1} \sigma . \quad (3.66)$$

Die Schädigungsvariable stellt somit einen funktionalen Zusammenhang zwischen der effektiven Spannung  $\tilde{\sigma}$  und der nominalen Spannung  $\sigma$  her. Der Einfluss von Spannungskonzentrationen auf das Materialverhalten wird hierbei jedoch vernachlässigt.

Für mehraxiale Beanspruchung ist Formulierung (3.66) zu verallgemeinern,

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = (\mathbf{I} - \mathbf{D})^{-1} : \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{M} : \boldsymbol{\sigma} . \quad (3.67)$$

Mit dem Einheitstensor 4. Stufe  $\mathbf{I}$  und dem Schädigungstensor 4. Stufe  $\mathbf{D}$  bzw. dem Schädigungseffektensor  $\mathbf{M}$  ist anisotrope Schädigung beschreibbar, wobei Schädigungs- und Schädigungseffektensor folgende Symmetrieeigenschaften besitzen,

$$D_{ijkl} = D_{jikl} = D_{ijlk} , \quad M_{ijkl} = M_{jikl} = M_{ijlk} . \quad (3.68)$$

Für den Fall skalarer isotroper Schädigung folgt mit  $\mathbf{M} = (1-D)^{-1} \mathbf{I}$  der effektive Spannungstensor zu

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = (1-D)^{-1} \boldsymbol{\sigma} . \quad (3.69)$$

Der Gedanke, das Materialverhalten mit Hilfe effektiver Spannungen zu beschreiben, wird bei den Äquivalenzprinzipien aufgegriffen. Aus den verschiedenen Äquivalenzprinzipien resultieren unterschiedliche Definitionen für effektive Materialtensoren.

### 3.7.2 Prinzip der Dehnungsäquivalenz

Nach dem Prinzip der Dehnungsäquivalenz [86] sind die Verzerrungen des geschädigten Materials unter nominalen Spannungen äquivalent zu den Verzerrungen des unge-

schädigten Materials unter effektiven Spannungen, wie in Bild 3.6 schematisch dargestellt. In Zustandsgleichung (3.34) ist demnach der nominale Spannungstensor  $\sigma$  durch den effektiven Spannungstensor  $\tilde{\sigma}$  zu ersetzen,

$$\epsilon^{el} = F : \tilde{\sigma} = F : M : \sigma = \tilde{F} : \sigma . \quad (3.70)$$

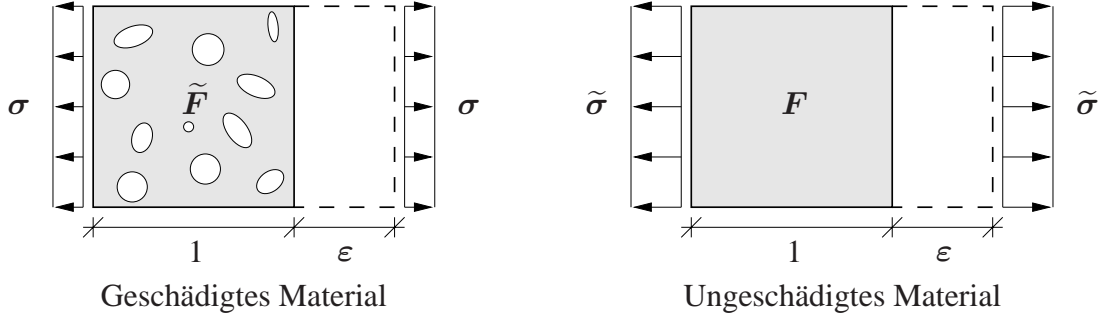


Bild 3.6: Prinzip der Dehnungsäquivalenz

Der effektive Nachgiebigkeitstensor

$$\tilde{F} = F : M = F : (\overset{4}{I} - D)^{-1} \quad (3.71)$$

charakterisiert das Verformungsverhalten des geschädigten Materials und ist im Allgemeinen unsymmetrisch. Folglich ist für den effektiven Nachgiebigkeitstensor (3.71) die Integrabilitätsbedingung (3.36) nicht erfüllt, so dass die Zustandsgleichung (3.70) lediglich zur Beschreibung skalarer isotroper Schädigung geeignet ist.

### 3.7.3 Prinzip der Energieäquivalenz

Sidoroff & Cordebois [25] ersetzen den nominalen Spannungstensor  $\sigma$  im elastischen Potential (3.33) durch den effektiven Spannungstensor  $\tilde{\sigma}$ ,

$$-\rho g^{el}(\sigma, M) = \frac{1}{2} \tilde{\sigma} : F : \tilde{\sigma} = \frac{1}{2} \sigma : M^T : F : M : \sigma = \frac{1}{2} \sigma : \tilde{F} : \sigma . \quad (3.72)$$

Die Energiedichte des geschädigten Materials, formuliert mit nominalen Spannungen, ist demnach äquivalent zur Energiedichte des ungeschädigten Materials, formuliert mit effektiven Spannungen, wie in Bild 3.7 schematisch dargestellt.

Der effektive Nachgiebigkeitstensor ist entsprechend Gl. (3.72) mit dem Schädigungseffektstensor  $M$  und dessen Transponierter

$$M^T = M_{kl ij} e_i \otimes e_j \otimes e_k \otimes e_l \quad (3.73)$$

definiert zu

$$\tilde{F} = M^T : F : M = (\overset{4}{I} - D)^{-T} : F : (\overset{4}{I} - D)^{-1} \quad (3.74)$$

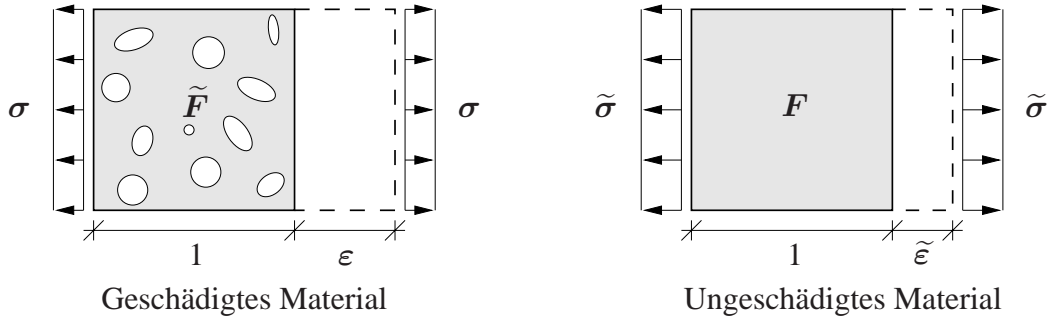


Bild 3.7: Prinzip der Energieäquivalenz

und erfüllt aufgrund seiner Symmetrie die Integrabilitätsbedingung (3.36). Zudem folgt aus Gl. (3.72) der effektive elastische Verzerrungstensor

$$\tilde{\epsilon}^{el} = -\rho \frac{\partial g^{el}}{\partial \tilde{\sigma}} = \mathbf{F} : \tilde{\sigma} \quad (3.75)$$

als thermodynamisch konjugierte Variable zum effektiven Spannungstensor. Einsetzen von Gl. (3.75) in die Zustandsgleichung  $\epsilon^{el} = \mathbf{M}^T : \mathbf{F} : \tilde{\sigma}$  führt auf den funktionalen Zusammenhang zwischen effektiven und nominalen elastischen Verzerrungen,

$$\tilde{\epsilon}^{el} = \mathbf{M}^{-T} : \epsilon^{el} = (\mathbf{I} - \mathbf{D})^T : \epsilon^{el} . \quad (3.76)$$

### 3.7.4 Materialgleichungen

Die Herleitung der Materialgleichungen erfolgt exemplarisch für skalare isotrope Schädigung mit Hilfe des Prinzips der maximalen Dissipation. Isotrope Schädigung kann nur in einfachster Form mit einer skalaren Schädigungsvariable modelliert werden, was einer Abminderung des Elastizitätsmoduls entspricht. Allgemein erfordert die Modellierung isotroper Schädigung die Verwendung eines Schädigungstensors höherer Stufe, um Veränderungen von Elastizitätsmodul und Querdehnzahl beschreiben zu können.

Die spezifische freie Energie ist bei skalarer isotroper Schädigung definiert zu

$$\rho \Psi(\epsilon^{el}, D, \zeta) = \frac{1}{2} (1 - D)^2 \epsilon^{el} : \mathbf{C} : \epsilon^{el} + \rho \Psi^d(\zeta) \quad (3.77)$$

und besteht aus einem elastischen und einem inelastischen Anteil. Dabei ist dem Prinzip der Energieäquivalenz entsprechend die Schädigungsvariable quadratisch im Potential (3.77) berücksichtigt. Partielles Ableiten des Potentials nach den Zustandsvariablen ergibt die Zustandsgleichungen, mit denen die thermodynamisch konjugierten Variablen

$$\sigma = \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \epsilon^{el}} = (1 - D)^2 \mathbf{C} : \epsilon^{el} = \tilde{\mathbf{C}} : \epsilon^{el} , \quad (3.78)$$

$$Y = -\rho \frac{\partial \Psi}{\partial D} = (1 - D) \epsilon^{el} : \mathbf{C} : \epsilon^{el} , \quad (3.79)$$

$$\eta_i = \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \zeta_i} \quad (3.80)$$

bestimmt sind. Die Energiefreisetzungsrates  $Y$  ist somit die zur skalaren Schädigungsvariable  $D$  thermodynamisch konjugierte Größe.

In der Kontinuumschädigungsmechanik erfolgt die Beschreibung des Materialverhaltens analog zur Plastizitätstheorie. So ist anhand einer Schädigungsbedingung

$$S = S(Y, \boldsymbol{\eta}) \leq 0 \quad (3.81)$$

zu entscheiden, ob eine Beanspruchung zur Schädigung des Materials führt. Im Gegensatz zur Plastizitätstheorie wird in der Kontinuumschädigungsmechanik eine von den Verzerrungen bzw. der Energiefreisetzungsrates abhängige Formulierung gewählt. Eine Zusammenstellung unterschiedlicher Formulierungen enthält [64]. Im dreidimensionalen Raum der Hauptverzerrungen beschreibt die Schädigungsbedingung eine konvexe Fläche, die als Schädigungsfläche bezeichnet wird.

Für rein mechanische Prozesse folgt mit Ungl. (3.23) bzw. (3.27) die Dissipation zu

$$\Phi = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} - \rho \dot{\Psi} = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^{el} - \rho \dot{\Psi} = Y \dot{D} - \sum_{i=1}^n \eta_i \dot{\zeta}_i \geq 0. \quad (3.82)$$

Das Prinzip der maximalen Dissipation fordert unter Einhaltung der Schädigungsbedingung (3.81) und der Be- und Entlastungsbedingungen (Kuhn-Tucker-Bedingungen)

$$\dot{\lambda} \geq 0, \quad S \leq 0, \quad \dot{\lambda} S = 0, \quad (3.83)$$

dass die Dissipation einen Extremwert annimmt. Die Schädigungsbedingung ist somit Nebenbedingung der zu lösenden Extremwertaufgabe und über einen Lagrange'schen Multiplikator  $\dot{\lambda}$  im Funktional

$$L(Y, \boldsymbol{\eta}, \dot{\lambda}) = -\Phi(Y, \boldsymbol{\eta}) + \dot{\lambda} S(Y, \boldsymbol{\eta}) = -Y \dot{D} + \sum_{i=1}^n \eta_i \dot{\zeta}_i + \dot{\lambda} S \quad (3.84)$$

berücksichtigt. Für die Extremwerte des Funktionals gilt

$$\frac{\partial L}{\partial Y} = 0 = -\dot{D} + \dot{\lambda} \frac{\partial S}{\partial Y}, \quad \frac{\partial L}{\partial \eta_i} = 0 = \dot{\zeta}_i + \dot{\lambda} \frac{\partial S}{\partial \eta_i}, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{\lambda}} = 0 = S. \quad (3.85)$$

Die Evolutionsgleichungen für die Schädigungsvariable  $D$  und die inneren Zustandsvariablen  $\zeta$  folgen somit aus der Schädigungsbedingung. Alternativ ist eine direkte Vorgabe oder eine Bestimmung der Evolutionsgleichungen anhand eines mikromechanischen Modells [17] möglich. Die thermodynamische Konsistenz einer solchen Formulierung ist durch nachträgliche Herleitung der übergeordneten Potentiale zu prüfen.

Unter Berücksichtigung von Gl. (3.78) und (3.85) gilt für die Spannungsraten

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = (1 - D)^2 \mathbf{C} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^{el} - 2 (1 - D) \mathbf{C} : \boldsymbol{\epsilon}^{el} \frac{\partial S}{\partial Y} \dot{\lambda}. \quad (3.86)$$

Mit der Konsistenzbedingung

$$\dot{S} = \frac{\partial S}{\partial Y} \frac{\partial Y}{\partial \epsilon^{el}} : \dot{\epsilon}^{el} + \frac{\partial S}{\partial Y} \frac{\partial Y}{\partial D} \dot{D} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial S}{\partial \eta_i} \frac{\partial \eta_i}{\partial \zeta_j} \dot{\zeta}_j = 0 \quad (3.87)$$

sowie den Evolutionsgleichungen (3.85) folgt der Lagrange'sche Multiplikator zu

$$\dot{\lambda} = \frac{\frac{\partial S}{\partial Y} \frac{\partial Y}{\partial \epsilon^{el}} : \dot{\epsilon}^{el}}{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial S}{\partial \eta_i} \frac{\partial \eta_i}{\partial \zeta_j} \frac{\partial S}{\partial \eta_j} - \frac{\partial S}{\partial Y} \frac{\partial Y}{\partial D} \frac{\partial S}{\partial Y}}. \quad (3.88)$$

Ablösen von  $\dot{\lambda}$  in Gl. (3.86) ergibt den direkten funktionalen Zusammenhang zwischen Spannungs- und Verzerrungsraten

$$\dot{\sigma} = \left( (1 - D)^2 \mathbf{C} - 2 \frac{(1 - D) \mathbf{C} : \epsilon^{el} \frac{\partial S}{\partial Y} \otimes \frac{\partial S}{\partial Y} \frac{\partial Y}{\partial \epsilon^{el}}}{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial S}{\partial \eta_i} \frac{\partial \eta_i}{\partial \zeta_j} \frac{\partial S}{\partial \eta_j} - \frac{\partial S}{\partial Y} \frac{\partial Y}{\partial D} \frac{\partial S}{\partial Y}} \right) : \dot{\epsilon}^{el} = \mathbf{C}^{tan} : \dot{\epsilon}^{el}. \quad (3.89)$$

Der Steifigkeitstensor  $\mathbf{C}^{tan}$  ist in diesem Fall symmetrisch, da für die Evolution der Schädigungsvariable die Normalenregel gilt.

Aus dem Prinzip der maximalen Dissipation folgen Konvexität der Schädigungsfläche (Konvexitätsbedingung) und assoziierte Evolutionsgleichungen (Normalenregel). Alternativ ist eine Formulierung der Schädigungsbedingung mit Hilfe des elastischen Verzerrungstensors  $\epsilon^{el}$  anstatt der Energiefreisetzungsrate  $Y$  möglich [32, 95]. Der aus einer solchen Formulierung resultierende Steifigkeitstensor ist im Allgemeinen unsymmetrisch, da für die Evolution der Schädigungsvariable die Normalenregel nicht gilt. Zudem ist eine formale Herleitung der Materialgleichungen mit Hilfe des Prinzips der maximalen Dissipation nicht möglich, weil die Schädigungsbedingung keine Funktion der thermodynamisch konjugierten Variablen (3.78) - (3.80) ist.

### 3.8 Kopplung von inelastischem Materialverhalten und Schädigung

Im Beton gehen irreversible Verformungen des Materials mit der Degradation der Materialeigenschaften einher, so dass eine Kopplung von elastisch-plastischem Materialverhalten und Schädigung erforderlich ist. Formal ist die Beschreibung des gekoppelten Prozesses mit einer Fließ- und einer Schädigungsbedingung möglich [53, 136]. Da im Beton irreversible Verformungen und Schädigung stets gemeinsam auftreten, erscheint es sinnvoll, das Materialverhalten mit Hilfe eines einzigen Kriteriums zu beschreiben. Die Modellierung des gekoppelten Prozesses kann im Rahmen der Plastizitätstheorie erfolgen [87, 167]. Eine Möglichkeit zur Erweiterung eines Plastizitätsmodells ist die Berücksichtigung der Schädigungsvariable in der Fließbedingung, indem z. B. der nominale Spannungstensor  $\sigma$  durch den effektiven Spannungstensor  $\tilde{\sigma}$  ersetzt wird. Ferner ist das Dissipationspotential um einen zusätzlichen Term zu erweitern, aus dem



die Evolutionsgleichung für die Schädigungsvariable resultiert. Ein Beispiel für diese Modellklasse ist das Modell von Lemaitre [87], das strukturell dem in dieser Arbeit entwickelten Modell vergleichbar ist. Lemaitre verwendet eine skalare Schädigungsvariable  $D$  sowie eine isotrope Verfestigungsvariable  $\zeta_1$  zur Beschreibung des Materialverhaltens. Ausgehend von der Fließbedingung

$$F(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}, \eta_1) = F(\boldsymbol{\sigma}, \eta_1; D) \leq 0, \quad (3.90)$$

der spezifischen freien Energie

$$\rho \Psi(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}^{pl}, D, \zeta_1) = \frac{1}{2} (1 - D) (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^{pl}) : \mathbf{C} : (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^{pl}) + \rho \Psi^{pl}(\zeta_1) \quad (3.91)$$

und dem um den Term  $\varphi^d$  erweiterten Dissipationspotential

$$\varphi(\boldsymbol{\sigma}, \eta_1, Y; D) = F(\boldsymbol{\sigma}, \eta_1; D) + \varphi^d(Y; D) \quad (3.92)$$

gilt für die Zustands- und Evolutionsgleichungen

$$[\boldsymbol{\sigma}, Y, \eta_1] = \rho \left[ \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}, -\frac{\partial \Psi}{\partial D}, \frac{\partial \Psi}{\partial \zeta_1} \right], \quad (3.93)$$

$$[\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{pl}, \dot{D}, \dot{\zeta}_1] = \begin{cases} \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \dot{\lambda}, \frac{\partial \varphi}{\partial Y} \dot{\lambda}, -\frac{\partial \varphi}{\partial \eta_1} \dot{\lambda} \right] & \text{für } F = 0, \\ 0 & \text{für } F < 0, \end{cases} \quad (3.94)$$

wobei die Schädigungsvariable in der Fließbedingung und im Dissipationspotential lediglich die Funktion eines Parameters übernimmt [87]. Darüber hinaus besteht die Möglichkeit, in der Fließbedingung neben dem Spannungstensor  $\boldsymbol{\sigma}$  und der inneren Variablen  $\eta_1$  die Energiefreisetzungsrate  $Y$  zu berücksichtigen [166, 167]. Dissipationspotential und Fließbedingung sind dann identisch, so dass für sämtliche Evolutionsgleichungen die Normalenregel gilt.

In dieser Arbeit erfolgt die Beschreibung des gekoppelten Prozesses im Rahmen der Plastizitätstheorie. Dabei sind Auswirkungen von Rissbildung und -wachstum auf das Materialverhalten mit Hilfe plastischer Verzerrungen und eines Schädigungstensors 4. Stufe integral erfasst.

### 3.9 Modellierung von Rissen

Hinsichtlich der Modellierung von Rissen ist zwischen diskreten und verschmierten Rissmodellen zu unterscheiden. Während diskrete Rissmodelle einen Riss als Diskontinuität im Verschiebungsfeld beschreiben, bleibt bei verschmierten Rissmodellen auch nach Rissbildung die Kontinuität der Verschiebungen gewahrt.



## **Diskrete Rissmodelle**

Diskrete Rissmodelle beschreiben Risse als geometrische Unstetigkeit. Dabei sind im Rahmen der Finite-Element-Methode zwei unterschiedliche Vorgehensweisen möglich.

Bereits Ende der 1960er Jahre wurde von Ngo & Scordelis [107] eine Auftrennung des Finite-Element-Netzes nach Überschreitung eines Rissfortschrittkriteriums vorgeschlagen. Dieses Vorgehen erfordert entweder eine Neuvernetzung der Struktur oder die Verwendung von Interface-Elementen. Der potentielle Rissverlauf liegt bei einer solchen Vorgehensweise bereits mit der Diskretisierung fest, da ein Riss lediglich entlang der Elementränder verlaufen kann. Daher wird die Steifigkeit einer Struktur im Allgemeinen überschätzt [59]. Eine adäquate Beschreibung des Strukturverhaltens ist mit Hilfe netzadaptiver Verfahren möglich [61]. Dabei erfolgt mit enormen Berechnungsaufwand eine Anpassung der Diskretisierung an die zuvor ermittelte Rissrichtung. Diese Vorgehensweise ist deshalb vor allem zur Beschreibung von Strukturen geeignet, bei denen der Rissverlauf a priori bekannt ist.

Darüber hinaus ermöglicht eine Anreicherung der Ansätze im Element eine diskrete Beschreibung von Rissen, wobei die zusätzlichen Ansätze Diskontinuitäten im Verschiebungsfeld beschreiben [65, 156]. Aufgrund der Anreicherung sind zusätzliche Freiwerte auf Systemebene notwendig, die bei der erweiterten Finite-Element-Methode jedoch nur in unmittelbarer Umgebung eines Risses vorhanden sind. Die Verwendung netzadaptiver Verfahren ist bei einer solchen Vorgehensweise nicht erforderlich, da sich der Rissverlauf unabhängig von der Diskretisierung einstellen kann.

Bei einer diskreten Beschreibung von Rissen sind die Spannungen an der Rissspitze singulär und somit nicht objektiv. Die Definition eines objektiven Rissfortschrittkriteriums erfordert die Verwendung bruchmechanischer Kriterien [10], die eine Bewertung der Singularität an der Rissspitze gestatten.

## **Versmierte Rissmodelle**

Bei Zugbeanspruchung erfolgen Rissbildung und -ausbreitung im Beton orthogonal zur größten Hauptzugspannung. Aufgrund der Verzahnung der Rissufer ist jedoch auch nach primärer Rissbildung eine Übertragung von Schubspannungen und somit eine Richtungsänderung der Hauptspannungen möglich. Daher können an der selben Stelle weitere, sekundäre Risse entstehen. Zudem zeigen experimentelle Untersuchungen, dass sich bei Entstehung eines neuen Risses bereits vorhandene Risse an der selben Stelle zu schließen beginnen [59].

Ein Riss ist bei kontinuumsmechanischer Betrachtung als Konzentration von Verzerungen in einem lokal eng begrenzten Bereich zu interpretieren. Daher erfolgt wie in

der Plastizitätstheorie eine additive Zerlegung der Verzerrungen in einen elastischen und einen den Riss beschreibenden inelastischen Anteil. Die Kontinuität des Verschiebungsfelds bleibt bei verschmierten Rissmodellen gewahrt, was zu Stress-Locking und zu einer Versteifung der Struktur führen kann [59]. Hinsichtlich der Rissentwicklung ist zwischen Fixed-Orthogonal-Crack-, Fixed-Multiple-Crack- sowie Rotating-Crack-Modellen zu unterscheiden.

Beim Fixed-Orthogonal-Crack-Modell ist erst nach einer Richtungsänderung der größten Hauptzugspannung um  $90^\circ$  die Bildung eines sekundären Risses möglich. Die potentiellen Rissrichtungen liegen demnach mit der Initiierung des primären Risses fest. Somit können bei räumlichen Spannungszuständen maximal drei Risse entstehen. Aufgrund dieser Einschränkung führt die Verwendung eines Fixed-Orthogonal-Crack-Modells zu einer Überschätzung der Steifigkeit und der Traglast.

Das Fixed-Multiple-Crack-Modell [30] ist eine Erweiterung des Fixed-Orthogonal-Crack-Modells. Um eine größere Anzahl von Rissen berücksichtigen zu können, ist die sekundäre Rissbildung bereits bei einer Richtungsänderung der größten Hauptzugspannung kleiner  $90^\circ$  möglich. Dabei ist die Anzahl potentieller Risse vom Anwender vorzugeben. Im Vergleich zum Fixed-Orthogonal-Crack-Modell liefert das Fixed-Multiple-Crack-Modell bessere Ergebnisse. Ein Nachteil ist jedoch der damit verbundene größere numerische Aufwand.

Beim Rotating-Crack-Modell [24] hingegen kann an einer Stelle nur ein einziger Riss entstehen. Die Rissorientierung liegt nicht wie bei den vorherigen Modellen mit der Initiierung des primären Risses fest, sondern rotiert mit der aktuellen größten Hauptzugspannung. Im Riss können daher keine Schubspannungen auftreten. Mit Kopplung der Rissorientierung an die Richtung der größten Hauptzugspannung ist gewährleistet, dass die Zugspannung die Zugfestigkeit des Materials nie übersteigt. Trotz der unphysikalischen Annahme eines rotierenden Risses liefert das Rotating-Crack-Modell gute Ergebnisse [8, 125]. Die Implementierung in ein Finite-Element-Programm ist zudem wesentlich einfacher als bei den Fixed-Crack-Modellen.

Aufgrund der guten Übereinstimmung mit experimentellen Untersuchungen und der numerischen Effizienz erfolgt die Modellierung von Rissbildung und -wachstum in dieser Arbeit entsprechend dem Rotating-Crack-Modell mit Hilfe eines rotierenden Risses. Im entwickelten Modell ist die Richtung der Normalen zur Rissfläche im Allgemeinen jedoch nicht mit der Richtung der größten Hauptzugspannung identisch, sondern wird im Rahmen einer erweiterten Kontinuumsformulierung aus den nichtlokalen effektiven plastischen Verzerrungen ermittelt. Die Erweiterung der klassischen Kontinuumsformulierung ist erforderlich, um im Beton die mit Rissbildung und -wachstum einhergehende Entfestigung beschreiben zu können.

## 4 Lokalisierung

Charakteristisch für das Versagen einer Vielzahl von Materialien ist die bei Entfestigung auftretende Lokalisierung von Verformungen in einem räumlich eng begrenzten Bereich, der Lokalisierungszone. Die Breite der Lokalisierungszone ist von der Mikrostruktur des Materials abhängig und demzufolge eine materialspezifische Größe. In klassischen Kontinuumsmodellen ist die Breite der Lokalisierungszone nicht definiert, so dass bei numerischer Simulation entfestigenden Materialverhaltens diskretisierungsabhängige Lösungen auftreten [7]. Dabei erfolgt die Lokalisierung stets in einer Zone der Breite eines Elementes. Zur Vermeidung dieses pathologischen Fehlverhaltens sind die Modellgleichungen klassischer Kontinuumsmodelle zu erweitern.

### 4.1 Einführung

Mit den Modellgleichungen, die bei klassischen Kontinuumsmodellen Gleichgewichtsbedingung, kinematische Beziehung und Materialgleichungen umfassen, ist das Strukturverhalten grundsätzlich beschreibbar. Die Lösung dieser Randwertaufgabe erfordert im Allgemeinen den Einsatz numerischer Verfahren, wie der Finite-Element-Methode. Nachfolgend werden die Auswirkungen des Fehlens einer definierten Breite der Lokalisierungszone bei numerischer Simulation entfestigenden Materialverhaltens im Rahmen der Plastizitätstheorie anhand des in Bild 4.1 dargestellten Dehnstabs erläutert [135]. Hierzu wird der Stab der Länge  $L$  in  $m$  äquidistante Elemente unterteilt. Die Spannung  $\sigma$  und die mittlere Verzerrung  $\langle \varepsilon \rangle$  des Stabs charakterisieren das Strukturverhalten, wobei  $\langle \varepsilon \rangle$  dem Verhältnis von Randverschiebung  $u$  zu Stablänge  $L$  entspricht. Nach Überschreitung der Anfangsfließspannung  $\sigma_{F_0}$  beschreibt eine lineare isotrope Entfestigung das Materialverhalten. Somit gilt unter Berücksichtigung des Entfestigungsmoduls  $H$  für die Fließbedingung

$$F = \sigma - (\sigma_{F_0} + H \varepsilon^{pl}) \leq 0 . \quad (4.1)$$

Mit der Fließbedingung folgt nach Anwenden der Normalenregel und nach Integration von Gl. (3.49) die Spannungs-Verzerrungs-Beziehung für den materiellen Punkt zu

$$\sigma = \frac{E H}{E + H} \varepsilon = E^{tan} \varepsilon . \quad (4.2)$$

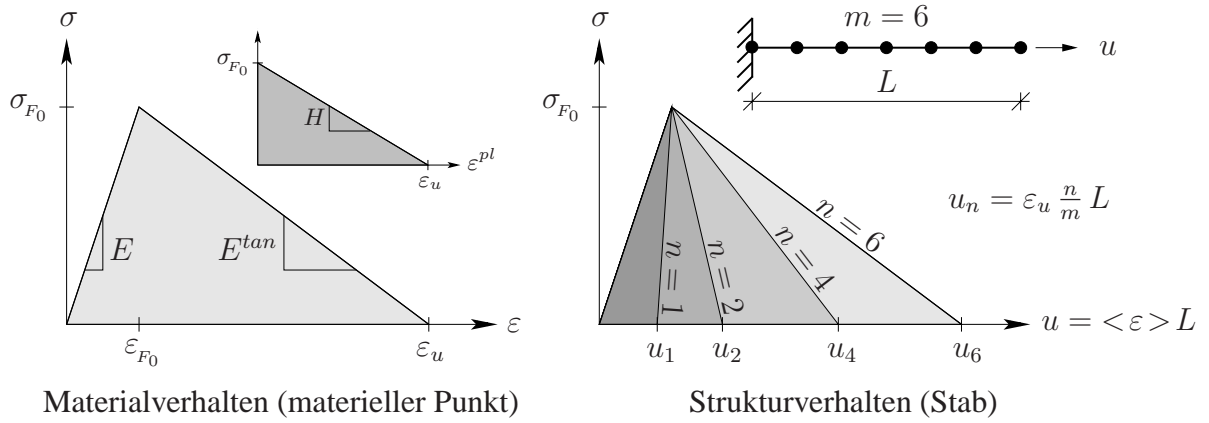


Bild 4.1: Auswirkungen einer Lokalisierung auf das Strukturverhalten

In der Plastizitätstheorie setzt sich die Gesamtverzerrung entsprechend Gl. (3.37) aus der Summe der elastischen und der plastischen Verzerrung zusammen. Somit gilt bei einer Lokalisierung der plastischen Verzerrung  $\varepsilon^{pl}$  in  $n$  Elementen für die mittlere Verzerrung des Stabs

$$\langle \varepsilon \rangle = \varepsilon^{el} + \varepsilon^{pl} = \frac{\sigma}{E} + \frac{n}{m} \frac{\sigma - \sigma_{F0}}{H} . \quad (4.3)$$

Folglich bestimmt  $n$  die Breite der Lokalisierungszone. Für die das Strukturverhalten charakterisierende tangentielle Steifigkeit gilt

$$\langle E^{tan} \rangle = \left( \frac{d\langle \varepsilon \rangle}{d\sigma} \right)^{-1} = \left( \frac{1}{E} + \frac{n}{m H} \right)^{-1} = \frac{E H m}{E n + H m} . \quad (4.4)$$

Aus Gl. (4.4) wird der Einfluss der Lokalisierungszonebreite und der Diskretisierung auf das Strukturverhalten ersichtlich. Der Nenner ist für  $m = -n E/H$  identisch null, so dass die Spannung nach Überschreiten der Fließspannung vertikal abfällt. Eine weitere Verfeinerung der Diskretisierung  $m > -n E/H$  führt zu einem Snap-Back-Verhalten der Struktur, wie im rechten Diagramm in Bild 4.1 für  $n = 1$  dargestellt.

Zudem verdeutlicht das rechte Diagramm die Abhängigkeit der Strukturantwort von der Breite der Lokalisierungszone. Für die gegebene Diskretisierung ( $m = 6$ ) sind sechs Gleichgewichtspfade möglich, wobei die Fläche unter der jeweiligen Spannungs-Verschiebungs-Linie die freigesetzte Energie

$$G_t = \int_0^{u_n} \sigma \, du = \frac{n}{m} L \int_0^{\varepsilon_u} \sigma \, d\varepsilon = \frac{1}{2} \sigma_{F0} \varepsilon_u \frac{n}{m} L = -\frac{1}{2} \frac{\sigma_{F0}^2}{H} \frac{n}{m} L \quad (4.5)$$

repräsentiert. Ist die plastische Verzerrung über den gesamten Stab konstant ( $n = 6$ ), dann entspricht das Strukturverhalten der für den materiellen Punkt vorgegebenen Spannungs-Verzerrungs-Beziehung. In diesem Fall ist die Dissipation bzw. die freigesetzte Energie  $G_t$  maximal. Demgegenüber ist bei Lokalisierung der plastischen Verzerrung in nur einem Element ( $n = 1$ ) die Dissipation minimal.

Im Nachbruchbereich können Störungen die Lösung der Randwertaufgabe maßgeblich beeinflussen. Ursache für Störungen sind beispielsweise geometrische Imperfektionen oder numerische Ungenauigkeiten in Form von Rundungsfehlern. Für ein homogenes imperfektionsfreies Material ist eine konstante Verteilung der Verzerrung und der Spannung im gesamten Stab zu erwarten. Bei numerischen Simulationen können jedoch infolge von Rundungsfehlern geringe Abweichungen von der zu erwartenden Lösung auftreten, die einen Wechsel des Gleichgewichtspfads bewirken und eine Lokalisierung der plastischen Verzerrung zur Folge haben. Der numerisch stabilste Gleichgewichtspfad ist derjenige, bei dem die plastische Verzerrung in nur einem Element lokalisiert und demnach die Dissipation am geringsten ist [27]. Dies bedeutet zugleich, dass bei Verfeinerung der Diskretisierung die Berechnungsergebnisse nicht gegen die exakte Lösung konvergieren. Zudem folgt aus Gl. (4.5), dass bei unendlich feiner Diskretisierung ( $m \rightarrow \infty$ ) während des Versagensprozesses keine Energie freigesetzt wird [9], was dem physikalischen Verständnis vom Materialversagen widerspricht. Eine Erweiterung der Modellgleichungen ist deshalb zwingend erforderlich.

## 4.2 Versagenskriterien

Indikatoren für die Existenz einer eindeutigen Lösung der Gleichgewichtsbedingung sind der Verlust der Eindeutigkeit, der Stabilität und der Elliptizität [31, 112, 133]. Diese auch als Versagenskriterien bezeichneten Indikatoren dienen zur Identifizierung materieller Instabilitäten, wobei zwischen lokalem Versagen auf Materialpunktebene und globalem Versagen auf Strukturebene zu unterscheiden ist. Die Anwendung der beiden erstgenannten Versagenskriterien ist sowohl auf Materialpunktebene als auch auf Strukturebene möglich. Der Verlust der Elliptizität hingegen stellt ausschließlich ein lokales Versagenskriterium dar.

### 4.2.1 Verlust der Eindeutigkeit

Solange die Spannungen in einem materiellen Punkt mit zunehmenden Verzerrungen monoton ansteigen, ist eine eindeutige Zuordnung von Spannungen und Verzerrungen möglich. Demzufolge ist die Materialantwort eindeutig, wenn die Rate des Spannungstensors der Bedingung  $\dot{\sigma} > 0$  genügt. Unter Berücksichtigung der Ratenform der Spannungs-Verzerrungs-Beziehung gilt

$$\dot{\sigma} = C^{tan} : \dot{\epsilon} > 0 . \quad (4.6)$$

Der Verlust der Eindeutigkeit folgt mit Erreichen des Grenzzustands  $\dot{\sigma} = 0$ . Für den Grenzzustand existiert nur dann eine nichttriviale Lösung, wenn der Steifigkeitstensor  $C^{tan}$  singulär wird. Folglich lautet das Kriterium für den Verlust der Eindeutigkeit

auf Materialpunktebene

$$\det \mathbf{C}^{tan} = 0 . \quad (4.7)$$

Auf Strukturebene hingegen bleibt die Lösung der Randwertaufgabe eindeutig, solange in der gesamten Struktur eine eindeutige Zuordnung von Spannungs- und Verzerrungsraten möglich ist. Demnach dürfen bei gegebenen Randbedingungen keine unterschiedlichen Spannungsraten existieren, die der Ratenform der Gleichgewichtsbedingung

$$\nabla \cdot \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \rho \dot{\mathbf{b}} = 0 \quad (4.8)$$

genügen. Existieren jedoch zwei unterschiedliche Spannungsraten  $\dot{\boldsymbol{\sigma}}_A$  und  $\dot{\boldsymbol{\sigma}}_B$ , gilt

$$\nabla \cdot \dot{\boldsymbol{\sigma}}_A + \rho \dot{\mathbf{b}} - (\nabla \cdot \dot{\boldsymbol{\sigma}}_B + \rho \dot{\mathbf{b}}) = \nabla \cdot (\dot{\boldsymbol{\sigma}}_A - \dot{\boldsymbol{\sigma}}_B) = \nabla \cdot \Delta \dot{\boldsymbol{\sigma}} = 0 . \quad (4.9)$$

Die schwache Form von Gl. (4.9) lautet unter Berücksichtigung der Ratenform der Spannungs-Verzerrungs-Beziehung sowie der Testfunktion  $\delta \Delta \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$

$$\int_{\Omega} \delta \Delta \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} : \mathbf{C}^{tan} : \Delta \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \, d\Omega = 0 . \quad (4.10)$$

Nach Diskretisierung von Gl. (4.10) folgt das algebraische Gleichungssystem

$$\mathbf{K} \Delta \mathbf{d} = 0 . \quad (4.11)$$

Dabei ist  $\mathbf{K}$  die Systemmatrix und  $\Delta \mathbf{d}$  der Vektor des Inkrements der Verschiebungsfreiwerte. Die Forderung nach Existenz einer nichttrivialen Lösung für Gl. (4.11) führt schließlich auf das Kriterium für den Verlust der Eindeutigkeit auf Strukturebene

$$\det \mathbf{K} = 0 . \quad (4.12)$$

#### 4.2.2 Verlust der Stabilität

Ein weiteres Versagenskriterium folgt aus der Stabilitätsbedingung von Hill [57], nach der ein Material als stabil anzusehen ist, solange das doppelte Skalarprodukt aus Verzerrungs- und Spannungsraten größer null ist,

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} : \dot{\boldsymbol{\sigma}} > 0 . \quad (4.13)$$

Demnach ist die materielle Stabilität mit Erreichen des Grenzzustands

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} : \mathbf{C}^{tan} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = 0 \quad (4.14)$$

nicht mehr gewährleistet. Aus der nichttrivialen Lösung von Gl. (4.14) folgt das Kriterium für den Verlust der Stabilität auf Materialpunktebene

$$\det \left( \frac{1}{2} (\mathbf{C}^{tan} + \mathbf{C}^{tanT}) \right) = 0 , \quad (4.15)$$

wobei aufgrund der quadratischen Form von Gl. (4.14) nur der symmetrische Anteil des Steifigkeitstensors aktiviert wird. Auf Strukturebene hingegen entspricht der Grenzzustand dem Integral über Gl. (4.14),

$$\int_{\Omega} \dot{\epsilon} : \mathbf{C}^{tan} : \dot{\epsilon} \, d\Omega = 0 . \quad (4.16)$$

Nach Diskretisierung von Gl. (4.16) folgt mit dem Vektor der Verschiebungsfreiwerte  $\mathbf{d}$

$$\mathbf{d}^T \mathbf{K} \mathbf{d} = 0 . \quad (4.17)$$

Eine nichttriviale Lösung für Gl. (4.17) existiert nur, wenn die Systemmatrix  $\mathbf{K}$  singulär wird. Folglich lautet das Kriterium für den Verlust der Stabilität auf Strukturebene

$$\det\left(\frac{1}{2} (\mathbf{K} + \mathbf{K}^T)\right) = 0 . \quad (4.18)$$

Ist der Steifigkeitstensor bzw. die Systemmatrix symmetrisch, dann liefern die Kriterien für den Verlust der Eindeutigkeit und der Stabilität identische Aussagen und sind mit Erreichen der maximal aufnehmbaren Spannung erfüllt. Dies ist beispielsweise bei Plastizitätsmodellen mit assoziierter Fließregel der Fall. Für unsymmetrische Steifigkeitstensoren bzw. Systemmatrizen hingegen tritt der Verlust der Stabilität vor dem Verlust der Eindeutigkeit ein [112]. Demnach können materielle Instabilitäten bei Plastizitätsmodellen mit nicht-assoziierter Fließregel bereits vor Erreichen der maximal aufnehmbaren Spannung auftreten, da aus einer solchen Formulierung unsymmetrische Steifigkeitstensoren und Systemmatrizen resultieren.

### 4.2.3 Verlust der Elliptizität

Unter mathematischen Aspekten ist die Ursache für die Abhängigkeit der Lösung von der Diskretisierung ein Wechsel des Typs der der Gleichgewichtsbedingung zugrunde liegenden Differentialgleichungen. Für den Fall statischer Beanspruchung verlieren die Differentialgleichungen ihre elliptische, für den Fall dynamischer Beanspruchung ihre hyperbolische Form. Als Indikator für einen Wechsel des Typs der Differentialgleichungen dient der Akustiktensor

$$\mathbf{A} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{C}^{tan} \cdot \mathbf{n} . \quad (4.19)$$

Der Akustiktensor entspricht der doppelten Verjüngung des Steifigkeitstensors  $\mathbf{C}^{tan}$  mit der Normalen  $\mathbf{n}$  auf die entstehende Diskontinuität. Aus der nichttrivialen Lösung von Gl. (4.19) resultiert bei statischer Beanspruchung das Kriterium für den Verlust der Elliptizität [87]

$$\det \mathbf{A} = 0 . \quad (4.20)$$



Wird lediglich der symmetrische Anteil des Akustiktensors berücksichtigt, so folgt das Kriterium für den Verlust der starken Elliptizität

$$\det\left(\frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{A}^T)\right) = 0. \quad (4.21)$$

Eine Betrachtung des Eigenwertspektrums des Akustiktensors und des symmetrisierten Akustiktensors zeigt, dass bei einem unsymmetrischen Steifigkeitstensor der Verlust der starken Elliptizität (4.21) vor dem Verlust der Elliptizität (4.20) eintritt [43, 112]. Ein Verlust der starken Elliptizität ist jedoch nur möglich, wenn bereits zuvor das Kriterium für den Verlust der Stabilität (4.15) verletzt wurde [112]. Für symmetrische Steifigkeitstensoren hingegen sind die lokalen Versagenskriterien für den Verlust der Eindeutigkeit, der Stabilität, der Elliptizität und der starken Elliptizität mit Erreichen der maximal aufnehmbaren Spannung erfüllt. Darüber hinaus kann mit Hilfe von Gl. (4.19) die Orientierung der entstehenden Diskontinuität bestimmt werden.

Sobald in einem einzigen materiellen Punkt die Elliptizität der der Gleichgewichtsbedingung zugrunde liegenden Differentialgleichungen verloren geht, ist die Lösung der Randwertaufgabe von der Diskretisierung abhängig und somit unbrauchbar. Demzufolge ist die Randwertaufgabe schlecht gestellt. Ursache hierfür ist eine unzureichende Beschreibung der Mikrostruktur bzw. des Phänomens der Lokalisierung. Mit Berücksichtigung einer internen Länge in den Modellgleichungen kann der fehlende Bezug zur Mikrostruktur hergestellt werden, wobei die interne Länge die Breite der Lokalisierungszone und damit die notwendige Energie zur Trennung des Materials bestimmt. Klassische Kontinuumsmodelle sind aufgrund des Fehlens einer internen Länge in den Modellgleichungen zur Beschreibung entfestigenden Materialverhaltens ungeeignet.

### 4.3 Regularisierungsstrategien

Die numerische Simulation entfestigenden Materialverhaltens führt bei Verwendung klassischer Kontinuumsmodelle zu diskretisierungsabhängigen Lösungen, so dass zur Regularisierung der Randwertaufgabe die Modellgleichungen zu erweitern sind. Nachfolgend werden unterschiedliche Regularisierungsstrategien unter physikalischen und numerischen Aspekten diskutiert.

#### 4.3.1 Rissbandmodell

Eine populäre Methode zur Vermeidung diskretisierungsabhängiger Lösungen bei entfestigendem Materialverhalten ist die Anpassung des Entfestigungsmoduls an die Dis-



diskretisierung [11, 157]. Die Anpassung erfolgt mit Hilfe der Bruchenergie

$$\langle G_t \rangle = \int \sigma \, du = w_c \int \sigma \, d\varepsilon = \text{const} , \quad (4.22)$$

die als erforderliche Energie zur Erzeugung eines Risses der Einheitsfläche interpretiert werden kann. Die Bruchenergie entspricht der Fläche unter der Spannungs-Verschiebungs-Linie und kann als konstanter Materialparameter angesehen werden [58].

Wie in Abschnitt 4.1 am Beispiel des Dehnstabs gezeigt, hängt die Bruchenergie bei klassischen Kontinuumsmodellen von der Diskretisierung ab. Unter der Annahme, dass die Lokalisierung in einer Zone der Breite eines Elements erfolgt ( $n = 1$ ), gilt für die Rissbandbreite beim Dehnstab  $w_c = L/m$ . Die Rissbandbreite entspricht einer internen Länge, die beim Rissbandmodell bereits mit der Diskretisierung festliegt. Für lineare isotrope Entfestigung folgt mit der Bedingung  $G_t = \langle G_t \rangle$  unter Berücksichtigung von Gl. (4.5) der diskretisierungsabhängige Entfestigungsmodul zu

$$H = -\frac{\sigma_{F_0}^2}{2 \langle G_t \rangle} w_c . \quad (4.23)$$

Einsetzen des Entfestigungsmoduls in Gl. (4.4) und (4.5) zeigt, dass die Strukturantwort und die Dissipation nun von der Diskretisierung unabhängig sind. Zur Analyse zweidimensionaler Strukturen schlägt Rots [125] für die Rissbandbreite eine vom Elementtyp abhängige Modifikation der Elementfläche  $A_e$  mit dem Wichtungsfaktor  $b$  vor,

$$w_c = b \sqrt{A_e} . \quad (4.24)$$

Mit Anpassung des Entfestigungsmoduls an die Diskretisierung wird der Wechsel des Typs der Gleichgewichtsbedingung zugrunde liegenden Differentialgleichungen allerdings nicht verhindert. Somit bleibt die Randwertaufgabe schlecht gestellt.

Das Rissbandmodell ist einfach zu implementieren, hat jedoch den Nachteil, dass die Rissbandbreite sowohl von der Diskretisierung als auch vom verwendeten Elementtyp und damit von der numerischen Formulierung abhängig ist. Das Rissbandmodell liefert zwar bei Verfeinerung des Elementnetzes eine von der Diskretisierung unabhängige Lösung, allerdings beeinflusst die Orientierung des Elementnetzes das Ergebnis. Zudem ist die Breite der Lokalisierungszone stets auf ein Element begrenzt.

### 4.3.2 Berücksichtigung viskosen Materialverhaltens

Viele Materialien weisen ein von der Belastungsgeschwindigkeit abhängiges, visko-plastisches Verhalten auf, das mit der ratenabhängigen Fließtheorie beschrieben werden kann. Die Modellierung visko-plastischen Materialverhaltens erfolgt wie in der raten-unabhängigen Fließtheorie mit Hilfe einer Fließbedingung  $F$ , siehe Abschnitt 3.6.1. Ne-

ben klassischen Überspannungsmodellen [38, 117] vom Duvaut-Lions- und Perzyna-Typ existieren Modelle, in denen zusätzlich die Rate innerer Variablen in die Fließbedingung eingeht [141, 155]. Dies ermöglicht z. B. die Modellierung des Portevin-Le Chatelier-Effekts. Nachfolgend wird am Beispiel des Überspannungsmodells vom Perzyna-Typ die regularisierende Wirkung ratenabhängiger Formulierungen erläutert.

Im Gegensatz zu ratenunabhängigen Formulierungen sind bei Überspannungsmodellen auch Spannungszustände außerhalb der Fließfläche zulässig. Demzufolge entfällt die Konsistenzbedingung zur Bestimmung des Lagrange'schen Multiplikators. Bei Überspannungsmodellen vom Perzyna-Typ wird daher eine Evolutionsgleichung

$$\dot{\lambda} = \frac{1}{\eta} \left\langle \frac{F(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\eta})}{\sigma_{F_0}} \right\rangle^n \quad (4.25)$$

für den Lagrange'schen Multiplikator in Abhängigkeit von der Überspannung  $F > 0$  definiert [117]. Ansonsten entsprechen Überspannungsmodelle vom Perzyna-Typ weitgehend einer ratenunabhängigen Formulierung. Neben dem dimensionslosen Modellparameter  $n$  sowie der Anfangsfließspannung  $\sigma_{F_0}$  enthält die Evolutionsgleichung (4.25) als weiteren Modellparameter die Viskosität  $\eta$ , die für die regularisierende Wirkung bei ratenabhängigen Formulierungen verantwortlich ist.

Eine regularisierende Wirkung ist jedoch nur bei ausgeprägt viskosem Verhalten, das meist nur bei extrem hohen Belastungsgeschwindigkeiten auftritt, zu beobachten. Zudem ist eine Anpassung der Breite der Lokalisierungszone unabhängig von  $\eta$  nicht möglich. Daher ist eine solche Regularisierungsstrategie zur Beschreibung entfestigenden Materialverhaltens im Allgemeinen ungeeignet.

### 4.3.3 Verzerrungsgradientenmodelle

Verzerrungsgradientenmodelle resultieren aus Erweiterungen klassischer Kontinuumsmodelle und berücksichtigen den Einfluss des Verzerrungsgradienten auf das Materialverhalten. Allgemein kann die Formulierung auch mit Verzerrungsgradienten höherer Ordnung erfolgen. Grundlegende Arbeiten zur Beschreibung linear elastischen Materialverhaltens stammen von Toupin [147] und Mindlin [100]. Entsprechende Erweiterungen zur Beschreibung elastisch-plastischen Materialverhaltens wurden u. a. von Fleck & Hutchinson [45, 46] veröffentlicht.

Die Herleitung der Zustandsgleichungen erfolgt auf Grundlage der spezifischen freien Energie  $\Psi$ , in der neben den Verzerrungen auch der Verzerrungsgradient über die innere Variable  $\zeta$  eingeht. Partielles Ableiten der spezifischen freien Energie nach  $\zeta$  ergibt die Zustandsgleichung zur Bestimmung der Spannungen höherer Ordnung, die in die Gleichgewichtsbedingung einfließen. Die Erweiterungen gegenüber klassischen

Kontinuumsmodellen betreffen somit sämtliche Modellgleichungen und sind bereits bei elastischem Materialverhalten wirksam. Infolge der Erweiterungen enthalten die Modellgleichungen eine interne Länge, die bei numerischer Simulation entfestigenden Materialverhaltens regularisierend wirkt [69].

#### 4.3.4 Mikropolare Kontinua

Im Gegensatz zu klassischen Boltzmann-Kontinua werden bei mikropolaren Kontinua, zu denen das Cosserat-Kontinuum [26] zählt, neben Translations- auch Rotationsfreiheitsgrade berücksichtigt. Anwendung finden mikropolare Kontinua vor allem bei der Modellierung des Verformungsverhaltens kohäsionsloser Materialien, bei denen die Rotation einzelner Partikel eine physikalische Motivation für die Erweiterung darstellt [39]. Aufgrund der zusätzlichen Rotationsfreiheitsgrade ist die Kinematik gegenüber klassischen Kontinua zu erweitern. So folgen mit dem Verschiebungsvektor  $\mathbf{u}$  und dem Rotationsvektor  $\boldsymbol{\omega}$  unter Berücksichtigung des Permutationstensors  $\mathbf{e}$  die kinematischen Beziehungen zu

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \nabla \otimes \mathbf{u} - \mathbf{e} \cdot \boldsymbol{\omega} , \quad \boldsymbol{\kappa} = \nabla \otimes \boldsymbol{\omega} . \quad (4.26)$$

Der Verzerrungstensor  $\boldsymbol{\varepsilon}$  und der Krümmungstensor  $\boldsymbol{\kappa}$  bestimmen demnach den Deformationszustand eines materiellen Punktes. Neben Spannungen aus Verzerrungen können in einem materiellen Punkt auch Spannungen infolge der Rotation des Punktes auftreten. Mit dem Spannungstensor  $\boldsymbol{\sigma}$  und dem Momentenspannungstensor  $\boldsymbol{\mu}$  folgen für ein divergenzfreies Spannungs- und Momentenspannungsfeld aus Impuls- und Drehimpulsbilanz die Gleichgewichtsbedingungen

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0} , \quad \nabla \cdot \boldsymbol{\mu} + \mathbf{e} : \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0} . \quad (4.27)$$

Unter Berücksichtigung der Materialtensoren  $\mathbf{C}_\varepsilon$  und  $\mathbf{C}_\kappa$  nimmt das verallgemeinerte Hooke'sche Gesetz für das Cosserat-Kontinuum folgende Form an

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}_\varepsilon : \boldsymbol{\varepsilon} , \quad \boldsymbol{\mu} = \mathbf{C}_\kappa : \boldsymbol{\kappa} . \quad (4.28)$$

Zur Beschreibung isotropen, elastischen Materialverhaltens sind zusätzlich zu den beiden Lamé'schen Konstanten vier weitere Modellparameter erforderlich, wobei der erweiterte Modellparametersatz eine interne Länge enthält. Eine regularisierende Wirkung ist allerdings nur bei numerischer Simulation schubdominanter Versagensprozesse zu beobachten [28, 144]. Bei reinem Zugversagen hingegen werden die Rotationsfreiheitsgrade nicht angesprochen, so dass keine regularisierende Wirkung eintritt.

Eine Modellierung im Rahmen der Cosserat-Theorie erfordert eine Erweiterung sämtlicher Modellgleichungen. Die damit verbundenen Modifikationen sind bereits bei elastischem Materialverhalten wirksam, wenn die Rotationsfreiheitsgrade von der Belastung

angeregt werden. Demgegenüber betreffen Erweiterungen bei Integralmodellen sowie expliziten und impliziten Gradientenmodellen lediglich die Materialgleichungen.

#### 4.3.5 Nichtlokale Integralmodelle

Bei klassischen Kontinuumsmodellen gilt das Prinzip der lokalen Wirkung, so dass die Spannungen in einem materiellen Punkt  $\mathbf{x}$  mit den Verzerrungen  $\boldsymbol{\varepsilon}$ , den inneren Variablen  $\boldsymbol{\zeta}$  und gegebenenfalls der Temperatur  $\theta$  des betrachteten Punktes bestimmt sind. Verzerrungen, innere Variablen und Temperatur sind Zustandsvariablen, mit denen die Beanspruchung eines materiellen Punktes definiert ist. Anfang der 1960er Jahre wurde u. a. von Kröner [78] und Eringen & Edelen [41] das Prinzip der lokalen Wirkung hinterfragt und ein nichtlokales Kontinuumsmodell vorgeschlagen, in dem auch Zustandsvariablen benachbarter Punkte  $\mathbf{y}$  die Spannungen im materiellen Punkt  $\mathbf{x}$  beeinflussen. Die nichtlokale Wirkung ist mit Hilfe einer zusätzlichen Variable beschreibbar, die unter Berücksichtigung der Wichtungsfunktion  $w$  sowie des Normierungsfaktors  $w_\Omega$  definiert ist zu

$$\bar{k}(\mathbf{x}) = \frac{1}{w_\Omega(\mathbf{x})} \int_\Omega w(\mathbf{y}; \mathbf{x}) k(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \quad \text{mit} \quad w_\Omega(\mathbf{x}) = \int_\Omega w(\mathbf{y}; \mathbf{x}) d\mathbf{y}. \quad (4.29)$$

Die nichtlokale Variable  $\bar{k}$  ist der gewichtete Mittelwert der entsprechenden lokalen Variable  $k$  im Gebiet  $\Omega$ . Als Wichtungsfunktion wird häufig die Gauß-Verteilung

$$w(\mathbf{y}; \mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2} l^3} \exp\left(-\frac{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2}{2l^2}\right) \quad (4.30)$$

oder die Green-Funktion

$$w(\mathbf{y}; \mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi |\mathbf{x} - \mathbf{y}| l^2} \exp\left(-\frac{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}{l}\right) \quad (4.31)$$

verwendet, wobei  $|\mathbf{x} - \mathbf{y}|$  den Abstand zweier Punkte kennzeichnet. Die interne Länge  $l$  bestimmt die Größe des Einflussgebietes und stellt somit den Bezug zur Mikrostruktur her. Für  $l \rightarrow 0$  oder bei homogener Verteilung von  $k$  sind nichtlokale und lokale Variable identisch, so dass die nichtlokale in die lokale Formulierung übergeht.

Die Beschreibung entfestigenden Materialverhaltens erfolgt bei Integralmodellen meist mit Hilfe einer einzigen nichtlokalen Variable, die nur in den Materialgleichungen eingeht [12, 68]. Gleichgewichtsbedingung und kinematische Beziehung bleiben im Gegensatz zu Verzerrungsgradientenmodellen und mikropolaren Kontinua unverändert. Allerdings erfordert die Implementierung eines Integralmodells in ein Finite-Element-Programm aufgrund der räumlichen Mittelung erhebliche Eingriffe in die Programmstruktur. Eine Alternative zu Integralmodellen bieten explizite und implizite Gradientenmodelle, deren Implementierung wesentlich einfacher ist. Gradientenmodelle zeigen ebenso wie Integralmodelle eine regularisierende Wirkung [40, 89, 103, 115].

### 4.3.6 Explizite Gradientenmodelle

Die Herleitung der expliziten Gradientenformulierung kann auf Grundlage der Integralformulierung erfolgen [40]. Hierzu wird die lokale Variable  $k$  im materiellen Punkt  $x$  in einer Taylor-Reihe entwickelt,

$$k(\mathbf{y}) = k(\mathbf{x}) + \frac{\partial k}{\partial \mathbf{x}} \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{x}) + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 k}{\partial \mathbf{x} \otimes \partial \mathbf{x}} : (\mathbf{y} - \mathbf{x}) \otimes (\mathbf{y} - \mathbf{x}) + \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 k}{\partial \mathbf{x} \otimes \partial \mathbf{x} \otimes \partial \mathbf{x}} : (\mathbf{y} - \mathbf{x}) \otimes (\mathbf{y} - \mathbf{x}) \otimes (\mathbf{y} - \mathbf{x}) + \dots \quad (4.32)$$

Mit dem Laplace-Operator  $\nabla^2$  folgt nach Ablösen der lokalen Variable in Gl. (4.29)

$$\bar{k}(\mathbf{x}) = k(\mathbf{x}) + c(l) \nabla^2 k(\mathbf{x}) + d(l) \nabla^4 k(\mathbf{x}) + \dots \quad (4.33)$$

wobei aufgrund der Isotropie der Wichtungsfunktion (4.30) bzw. (4.31) ungerade Terme bei der Integration entfallen. Eine angemessene Näherung stellt die Vernachlässigung Terme 4. und höherer Ordnung dar [29]. Somit gilt für die nichtlokale Variable

$$\bar{k}(\mathbf{x}) = k(\mathbf{x}) + c(l) \nabla^2 k(\mathbf{x}) \quad (4.34)$$

Die expliziten Gradientenmodellen zugrunde liegende Modellgleichung (4.34) wird als "explizit" bezeichnet, weil die nichtlokale Variable unmittelbar aus der entsprechenden lokalen Variable resultiert.

Wie bei Integralmodellen geht auch bei expliziten Gradientenmodellen die nichtlokale in die lokale Formulierung über, wenn entweder  $l \rightarrow 0$  oder eine homogene Verteilung der lokalen Variable vorliegt. Die räumliche Interaktion ist jedoch im Gegensatz zu Integralmodellen und impliziten Gradientenmodellen auf die infinitesimale Umgebung des materiellen Punktes  $x$  beschränkt und daher weit weniger ausgeprägt [116].

### 4.3.7 Implizite Gradientenmodelle

Hinsichtlich Effizienz sind implizite Gradientenmodelle expliziten überlegen. Nachfolgend ist die Herleitung der impliziten Gradientenformulierung aufgezeigt [40]. So folgt nach Anwenden des Laplace-Operators auf Gl. (4.33)

$$\nabla^2 \bar{k}(\mathbf{x}) = \nabla^2 k(\mathbf{x}) + c(l) \nabla^4 k(\mathbf{x}) + \dots \quad (4.35)$$

Nach Multiplikation von Gl. (4.35) mit  $c(l)$  ist diese von Gl. (4.33) zu subtrahieren,

$$\bar{k}(\mathbf{x}) - c(l) \nabla^2 \bar{k}(\mathbf{x}) = k(\mathbf{x}) + (d(l) - (c(l))^2) \nabla^4 k(\mathbf{x}) + \dots \quad (4.36)$$

Unter der Annahme, dass die Differenz der Koeffizienten von Termen gleicher Ordnung identisch null ist, gilt

$$\bar{k}(\mathbf{x}) - c(l) \nabla^2 \bar{k}(\mathbf{x}) = k(\mathbf{x}) \quad (4.37)$$

Die impliziten Gradientenmodellen zugrunde liegende Modellgleichung (4.37) ist eine partielle Differentialgleichung vom Helmholtz-Typ. Im Gegensatz zur expliziten Gradientenformulierung sind hier Terme höherer Ordnung nicht vernachlässigt, sondern infolge des auf die nichtlokale Variable angewendeten Laplace-Operators implizit erfasst. Auswerten von Gl. (4.29) mit der Green-Funktion (4.31) und der Taylor-Reihe (4.32) zeigt, dass die Differenz der Koeffizienten von Termen gleicher Ordnung tatsächlich identisch null ist. Für den verbleibenden Koeffizienten gilt  $c(l) = l^2$ . Die implizite Gradientenformulierung ist demnach äquivalent zur Integralformulierung, wenn die Wichtung der lokalen Variable mit der Green-Funktion erfolgt. Somit findet wie bei der Integralformulierung die räumliche Interaktion in einem endlichen Gebiet statt. Die verallgemeinerte Form der impliziten Gradientenformulierung ist unter Berücksichtigung des Wichtungstensors 2. Stufe  $\mathbf{W}$  definiert zu

$$\bar{k}(\mathbf{x}) - \nabla \cdot (\mathbf{W} \cdot \nabla \bar{k}(\mathbf{x})) = k(\mathbf{x}) \quad (4.38)$$

und entspricht für  $\mathbf{W} = c(l) \overset{2}{\mathbf{I}}$  Gl. (4.37).

Bei der numerischen Umsetzung von Gradientenmodellen mittels der Finite-Element-Methode bedingt die Diskretisierung der schwachen Form der Differentialgleichung (4.37) bzw. (4.34) zusätzliche Freiwerte auf Systemebene. Daher sind bei einer Weggrößenformulierung neben Ansätzen für die Verschiebungen zusätzlich Ansätze für die nichtlokale Variable zu wählen. Für die nichtlokale Variable sind bei impliziten Gradientenmodellen  $C_0$ -konforme Ansätze ausreichend, während die numerische Umsetzung bei expliziten Gradientenmodellen  $C_1$ -konforme Ansätze erfordert [114]. Demnach bedingen implizite Gradientenmodelle geringeren numerischen Aufwand.

Unter numerischen und methodischen Aspekten bietet ein implizites Gradientenmodell gegenüber den anderen Regularisierungsstrategien Vorteile. Deshalb erfolgt die Regularisierung der Randwertaufgabe in dieser Arbeit mit Hilfe eines impliziten Gradientenmodells, wobei die Wirkung der Schädigung als nichtlokal angesehen wird.



## 5 Mikromechanisches Modell

Risse sind Folge einer Überbeanspruchung des Materials und bewirken anisotropes Verhalten. Im Beton können Risse sowohl infolge äußerer Beanspruchung als auch infolge Porendrucks entstehen. Experimentelle Analysen zur Auswirkung von Rissbildung und -wachstum auf das Verformungsverhalten bedingen enormen Aufwand. Zudem ist das Verformungsverhalten unter Porendruck messtechnisch kaum zu ermitteln. Daher werden im Rahmen dieser Arbeit die Auswirkungen von Rissbildung und -wachstum auf das Verformungsverhalten mit Hilfe eines mikromechanischen Modells untersucht, das sowohl äußere Beanspruchung als auch Porendruck berücksichtigt. Die Ergebnisse der mikromechanischen Untersuchung fließen in das in Kapitel 6 vorgestellte makromechanische Modell ein, das für die Strukturanalyse eingesetzt wird.

### 5.1 Grundlagen der Mikromechanik

Makroskopisch erscheinen viele Werkstoffe homogen, weisen aber bei genauerer Betrachtung eine heterogene Materialstruktur auf. Das Ziel einer mikromechanischen Modellierung besteht darin, Zusammenhänge zwischen dem Aufbau eines Werkstoffs und seinem makroskopischen Verhalten herzustellen. Der mit diesem Skalenübergang verbundene Mittelungsprozess wird als Homogenisierung bezeichnet, wobei in der Mikromechanik die Begriffe Mikro-, Meso- und Makroebene häufig nur den Bezug der unterschiedlichen Modellebenen zueinander verdeutlichen. Eine ausführliche Darstellung der Grundlagen der Mikromechanik ist u. a. in Gross & Seelig [52] sowie Nemat-Nasser & Hori [105] zu finden. Hinsichtlich des Vorgehens bei der Homogenisierung ist laut Böhm [18] zwischen den Mean-Field-Approaches und dem Konzept des repräsentativen Volumenelements zu unterscheiden. Die Homogenisierung, deren Ziel die Bestimmung effektiver Materialeigenschaften ist, erfordert das Lösen von Randwertaufgaben, für die nur in Ausnahmefällen analytische Lösungen existieren.

Bei den Mean-Field-Approaches erfolgt die Homogenisierung auf Grundlage des Eigendehnungskonzepts. Dazu wird die Randwertaufgabe für ein heterogenes Material in eine Randwertaufgabe für ein homogenes Vergleichsmaterial mit Eigendehnungen überführt, wobei das Eigendehnungsfeld die Heterogenität repräsentiert. Im unendlichen Halbraum existieren für einfache Geometrien der zu beschreibenden Heteroge-

nität zum Teil analytische Lösungen [42], welche die Grundlage für verschiedene Näherungsverfahren bilden. Zu diesen zählen die Dilute-Distribution-Methode, die Mori-Tanaka-Methode, die Selbstkonsistenz-Methode und das Differentialschema [18]. Aus den verschiedenen Näherungsverfahren resultieren unterschiedliche Definitionen für effektive Materialeigenschaften. Mit Hilfe von Variationsmethoden, wie dem Hashin-Shtrikman-Prinzip, können untere und obere Schranken für die effektiven Materialeigenschaften bestimmt werden [52].

Beim Konzept des repräsentativen Volumenelements wird die Mikrostruktur in einem RVE abgebildet, wobei die Beschreibung der Mikrostruktur auf Grundlage von Gefügeschliffen erfolgen kann. Für den Fall einer periodischen Anordnung der Komponenten ist die Mikrostruktur mit Hilfe einer Einheitszelle beschreibbar. Die Homogenisierung erfordert hier im Gegensatz zu den Mean-Field-Approaches den Einsatz numerischer Verfahren, um die zugrunde liegende Randwertaufgabe lösen zu können.

In dieser Arbeit erfolgt die Homogenisierung mit Hilfe des Konzepts des repräsentativen Volumenelements, um die Auswirkungen der mit Rissbildung und -wachstum einhergehenden anisotropen Schädigung auf das Verformungsverhalten bei äußerer Beanspruchung und Porendruck systematisch untersuchen zu können. Im Beton tritt Porendruck z. B. bei Sulfattreiben oder Brandeinwirkung auf, vergleiche Abschnitt 2.3.

### 5.1.1 Repräsentatives Volumenelement

Ein Körper bzw. Gebiet  $\Omega$  besteht bei kontinuumsmechanischer Betrachtung aus materiellen Punkten  $\boldsymbol{x} \in \Omega$ , wobei ein materieller Punkt ein differentielles Volumen des Körpers bzw. Gebiets repräsentiert. Dem differentiellen Volumen wird in der Mikromechanik über ein Volumenelement, welches das Gebiet  $\Omega^*$  umfasst, eine Mikrostruktur zugewiesen, deren Eigenschaften die Feldgröße  $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}^*)$  mit  $\boldsymbol{x}^* \in \Omega^*$  repräsentiert. Das Volumenelement wird als repräsentatives Volumenelement (RVE) bezeichnet, wenn es folgenden Anforderungen genügt:

- Im Vergleich zu einer charakteristischen Abmessung  $l_{Mak}$  auf Makroebene, z. B. Größe des Lasteinflussbereichs, ist das RVE hinreichend klein, so dass Spannungsgradienten auf Makroebene im RVE vernachlässigbar sind, siehe Bild 5.1.
- Im Vergleich zu einer charakteristischen Abmessung  $l_{Mik}$  auf Mikroebene, z. B. Größe oder Abstand einzelner Komponenten, ist das RVE hinreichend groß, so dass eine statistisch homogene Verteilung der Komponenten im RVE vorliegt.

Folglich gilt

$$l_{Mik} \ll l_{RVE} \ll l_{Mak} . \quad (5.1)$$



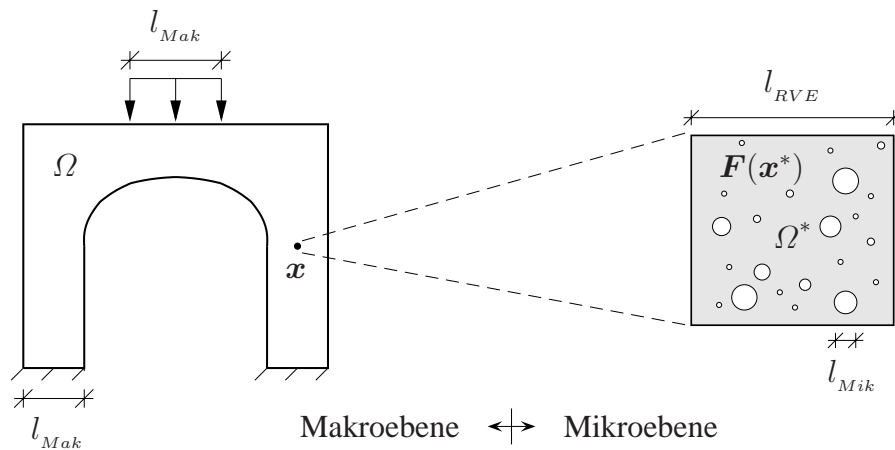


Bild 5.1: Repräsentatives Volumenelement (RVE)

Das RVE beschreibt einen Ausschnitt der Mikrostruktur, der repräsentativ für das gesamte Material ist. Je nach Zielsetzung kann die Mikrostruktur sowohl vereinfacht als auch detailliert im RVE berücksichtigt werden. Die Beschreibung der Mikrostruktur setzt allerdings die Kenntnis der Materialeigenschaften sämtlicher im RVE berücksichtigter Komponenten sowie deren Verbundeigenschaften voraus.

### 5.1.2 Homogenisierung

Ziel der Homogenisierung ist die Bestimmung effektiver Materialeigenschaften, mit denen das Verhalten der Mikrostruktur auf Makroebene beschreibbar ist. Dazu wird der heterogenen Struktur des RVEs eine homogene Ersatzstruktur mit effektiven Materialeigenschaften zugeordnet. Bild 5.2 verdeutlicht das Prinzip der Homogenisierung, wobei die Beschreibung des Verformungsverhaltens des RVEs auf Makroebene mit Hilfe des effektiven Nachgiebigkeitstensors  $\tilde{F}$  erfolgt.

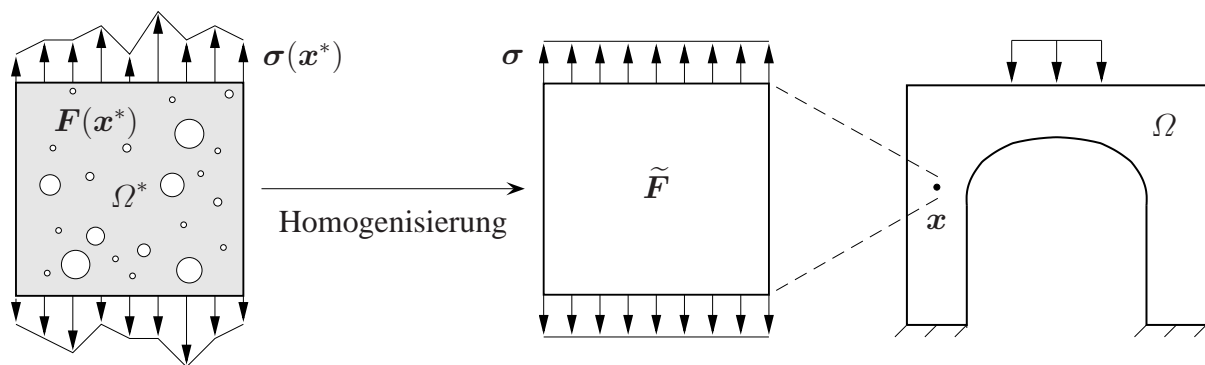


Bild 5.2: Prinzip der Homogenisierung

Die auf Mikroebene inhomogene Materialstruktur bedingt ein inhomogenes Spannungsfeld  $\sigma(x^*)$  und Verzerrungsfeld  $\varepsilon(x^*)$ , die auf Makroebene durch homogenisierte

Spannungen und Verzerrungen repräsentiert werden. Der homogenisierte Spannungstensor  $\sigma$  und Verzerrungstensor  $\varepsilon$  sind als räumliche Mittelwerte des entsprechenden Felds auf Mikroebene definiert,

$$\sigma = \langle \sigma(\mathbf{x}^*) \rangle = \frac{1}{V} \int_{\Omega^*} \sigma(\mathbf{x}^*) \, d\Omega^* , \quad (5.2)$$

$$\varepsilon = \langle \varepsilon(\mathbf{x}^*) \rangle = \frac{1}{V} \int_{\Omega^*} \varepsilon(\mathbf{x}^*) \, d\Omega^* . \quad (5.3)$$

Folglich geht der Informationsgehalt der auf Mikroebene inhomogenen Felder auf makroskopischer Modellebene verloren. Alternativ ist neben einer räumlichen auch eine statistische Mittelung möglich [77].

Besteht die Mikrostruktur aus  $n$  Komponenten, dann sind die homogenisierten Spannungen und Verzerrungen mit den entsprechenden Mittelwerten der einzelnen Komponenten bestimmbar. Mit dem Volumenanteil  $c_a$  einer Komponente und der Bedingung

$$\sum_{a=1}^n c_a = \sum_{a=1}^n \frac{V_a}{V} = 1 \quad (5.4)$$

folgt

$$\sigma = \frac{1}{V} \int_{\Omega^*} \sigma(\mathbf{x}^*) \, d\Omega^* = \sum_{a=1}^n c_a \frac{1}{V_a} \int_{\Omega_a^*} \sigma(\mathbf{x}^*) \, d\Omega^* = \sum_{a=1}^n c_a \sigma_a , \quad (5.5)$$

$$\varepsilon = \frac{1}{V} \int_{\Omega^*} \varepsilon(\mathbf{x}^*) \, d\Omega^* = \sum_{a=1}^n c_a \frac{1}{V_a} \int_{\Omega_a^*} \varepsilon(\mathbf{x}^*) \, d\Omega^* = \sum_{a=1}^n c_a \varepsilon_a , \quad (5.6)$$

wobei  $\sigma_a$  und  $\varepsilon_a$  die räumlichen Mittelwerte der Spannungen und Verzerrungen einer Komponente repräsentieren. Auf Makroebene beschreiben homogenisierte Größen das Verhalten des RVEs. So gilt bei elastischem Verformungsverhalten

$$\varepsilon = \tilde{\mathbf{F}} : \sigma , \quad (5.7)$$

wobei Gl. (5.7) strukturell der auf Mikroebene vorgegebenen Spannungs-Verzerrungs-Beziehung  $\varepsilon(\mathbf{x}^*) = \mathbf{F}(\mathbf{x}^*) : \sigma(\mathbf{x}^*)$  entspricht. Unter Berücksichtigung der Integritätsbedingung (3.36) sowie der Symmetrie von  $\sigma$  und  $\varepsilon$  enthält der effektive Nachgiebigkeitstensor 21 unabhängige Komponenten, für deren Bestimmung lediglich sechs Gleichungen zur Verfügung stehen. Demnach liegt hier ein unterbestimmtes Gleichungssystem vor. Die Ermittlung sämtlicher Komponenten des effektiven Nachgiebigkeitstensors erfordert daher die Vorgabe von sechs linear unabhängigen Spannungs- und Verzerrungszuständen im RVE.

### 5.1.3 Randbedingungen

Zur Bestimmung des Spannungs- und Verzerrungsfelds im RVE sind neben kinematischen Beziehungen, Gleichgewichtsbedingungen und Materialgleichungen zudem

Randbedingungen erforderlich. Die tatsächlichen Randbedingungen des RVEs sind jedoch unbekannt, so dass zur Lösung der Randwertaufgabe Annahmen bezüglich der Randbedingungen zu treffen sind. Für eine energetisch konsistente Homogenisierung resultieren geeignete Randbedingungen aus dem Postulat von Hill

$$\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{V} \int_{\Omega^*} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}^*) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}^*) \, d\Omega^* , \quad (5.8)$$

das Gleichheit zwischen der Formänderungsenergie auf Mikro- und Makroebene fordert. Mit dem Postulat von Hill folgt für ein divergenzfreies Spannungsfeld  $\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = 0$  unter Berücksichtigung des Gauß'schen Integralsatzes

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{V} \int_{\Omega^*} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}^*) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}^*) \, d\Omega^* - \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon} \\ &= \frac{1}{V} \int_{\Omega^*} (\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}^*) - \boldsymbol{\sigma}) : (\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}^*) - \boldsymbol{\varepsilon}) \, d\Omega^* \\ &= \frac{1}{V} \int_{\partial\Omega^*} \mathbf{n}(\mathbf{x}^*) \cdot (\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}^*) - \boldsymbol{\sigma}) \cdot (\mathbf{u}(\mathbf{x}^*) - \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{x}^*) \, d(\partial\Omega^*) , \end{aligned} \quad (5.9)$$

wobei die Differenz zwischen einem inhomogenen Feld und seinem räumlichen Mittelwert die Fluktuation des Felds beschreibt. Nach Gl. (5.9) leisten die Fluktuation des Spannungs- und des Verzerrungsfelds keinen Beitrag zur Gesamtenergie. Zudem ist aus Gl. (5.9) ersichtlich, dass sowohl lineare Verschiebungsrandbedingungen

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}^*) = \boldsymbol{\varepsilon}_0 \cdot \mathbf{x}^* , \quad \mathbf{x}^* \in \partial\Omega^* \quad (5.10)$$

als auch konstante Spannungsrandbedingungen

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}^*) = \boldsymbol{\sigma}_0 \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}^*) , \quad \mathbf{x}^* \in \partial\Omega^* \quad (5.11)$$

dem Postulat von Hill genügen [105]. Mit Hilfe eines konstanten Verzerrungstensors  $\boldsymbol{\varepsilon}_0$  bzw. Spannungstensors  $\boldsymbol{\sigma}_0$  sind lineare Verschiebungsrandbedingungen bzw. konstante Spannungsrandbedingungen beschreibbar. Bei linearen Verschiebungsrandbedingungen ist der Verschiebungsvektor  $\mathbf{u}$  auf dem Rand  $\partial\Omega^*$  des RVEs mit dem Verzerrungstensor  $\boldsymbol{\varepsilon}_0$  und dem Ortsvektor  $\mathbf{x}^*$  bestimmt. Der Spannungsvektor  $\mathbf{t}$  auf dem Rand  $\partial\Omega^*$  entspricht bei Vorgabe konstanter Spannungsrandbedingungen dem Skalarprodukt von  $\boldsymbol{\sigma}_0$  und dem nach außen gerichteten Normalenvektor  $\mathbf{n}$ .

Desweiteren besteht die Möglichkeit periodische Randbedingungen

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}^*) - \boldsymbol{\varepsilon}_0 \cdot \mathbf{x}^* = \mathbf{u}(\mathbf{x}_s^*) - \boldsymbol{\varepsilon}_0 \cdot \mathbf{x}_s^* , \quad \mathbf{x}^*, \mathbf{x}_s^* \in \partial\Omega^* , \quad (5.12)$$

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}^*) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}^*) = -\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}_s^*) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}_s^*) , \quad \mathbf{x}^*, \mathbf{x}_s^* \in \partial\Omega^* \quad (5.13)$$

vorzugeben, die ebenfalls dem Postulat von Hill genügen. Dabei kennzeichnet der Ortsvektor  $\mathbf{x}_s^*$  den zu  $\mathbf{x}^*$  zugehörigen Punkt am gegenüberliegenden Rand des RVEs. Voraussetzung für die Vorgabe periodischer Randbedingungen ist eine periodisch fortsetzbare Geometrie des RVEs sowie eine periodische Mikrostruktur.

In Abhängigkeit von der Art der Randbedingung führt die Homogenisierung in der Regel zu unterschiedlichen Ergebnissen. So unterliegt das RVE bei Vorgabe konstanter Randspannungen keinen Zwängen, während die Vorgabe linearer Randverschiebungen den größtmöglichen Zwang bewirkt. Daher grenzen konstante Spannungsrandbedingungen und lineare Verschiebungsrandbedingungen die effektiven Materialeigenschaften ein. Nur für ein hinreichend großes RVE sind effektive Materialeigenschaften bestimmbar, die nahezu unabhängig von der Art der Randbedingung sind.

Für lineare und periodische Randverschiebungen gilt das Average-Strain-Theorem

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \langle \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}^*) \rangle = \boldsymbol{\varepsilon}_0, \quad \mathbf{x}^* \in \partial\Omega^*, \quad (5.14)$$

für konstante Randspannungen das Average-Stress-Theorem

$$\boldsymbol{\sigma} = \langle \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}^*) \rangle = \boldsymbol{\sigma}_0, \quad \mathbf{x}^* \in \partial\Omega^*. \quad (5.15)$$

Demnach entspricht  $\boldsymbol{\varepsilon}_0$  bzw.  $\boldsymbol{\sigma}_0$  zugleich dem räumlichen Mittelwert des Verzerrungs- bzw. Spannungsfelds im RVE. Average-Strain-Theorem, Average-Stress-Theorem sowie das Postulat von Hill gelten unabhängig von den Materialgleichungen, die das Verhalten der einzelnen Komponenten auf Mikroebene beschreiben.

#### 5.1.4 Isotropisierung

Die Mikrostruktur von Werkstoffen besteht meist aus unterschiedlichen Komponenten. Weisen die einzelnen Komponenten auf Mikroebene keine Vorzugsorientierung auf, so ist auf Makroebene statistisch betrachtet isotropes Materialverhalten zu erwarten. Die effektiven Materialeigenschaften können jedoch auch bei zufälliger Orientierungsverteilung der einzelnen Komponenten im RVE anisotrop sein. Daher ist zur Beschreibung makroskopischer Isotropie im Allgemeinen eine Mittelung der effektiven Materialeigenschaften über sämtliche Orientierungen des RVEs erforderlich. Dieser Mittelungsprozess wird als Isotropisierung bezeichnet.

Die Isotropisierung erfolgt mit der Orientierungsdichteverteilungsfunktion  $f(\alpha, \beta, \gamma)$ ,

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} f(\alpha, \beta, \gamma) \sin \beta \, d\alpha \, d\beta \, d\gamma = 1, \quad (5.16)$$

die den Volumenanteil einer Komponente mit einer bestimmten Orientierung angibt [16] und bei isotroper Orientierungsverteilung definiert ist zu

$$f = \frac{1}{8\pi^2}. \quad (5.17)$$

Im kartesischen Koordinatensystem beschreiben die Euler-Winkel  $\alpha$ ,  $\beta$  und  $\gamma$  die Orientierung des RVEs. Bild 5.3 zeigt die Transformation vom globalen Koordinatensystem  $x_i$  ins lokale Koordinatensystem  $x'_i$ . Dabei erfolgt zunächst eine Drehung des globalen Koordinatensystems mit dem Winkel  $\alpha$  um die  $x_3$ -Achse. Es folgt eine Rotation mit dem Winkel  $\beta$  um die bereits gedrehte  $x_1$ -Achse und schließlich mit dem Winkel  $\gamma$  um die  $x'_3$ -Achse.

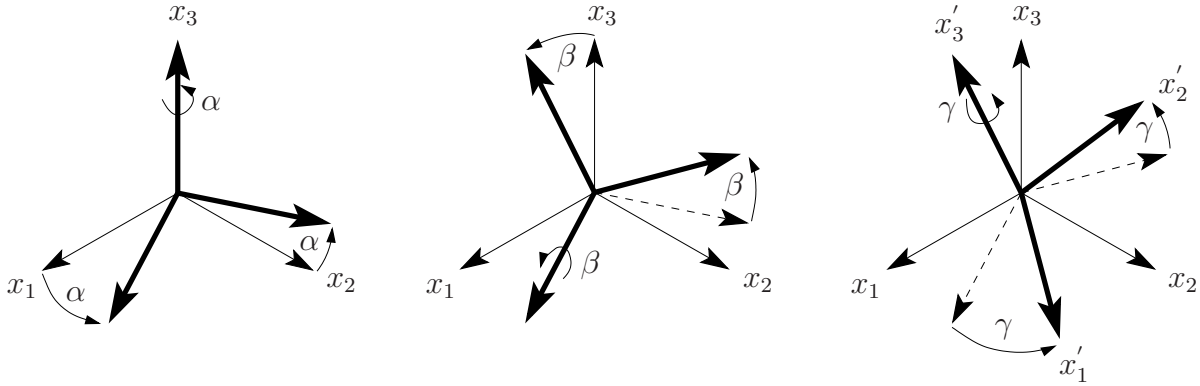


Bild 5.3: Definition der Euler-Winkel

Unter Berücksichtigung des Rotationstensors 2. Stufe  $\mathbf{Q}$  gilt für die Transformation des effektiven Elastizitätstensors ins globale Koordinatensystem

$$\tilde{C}_{ijkl} = Q_{im} Q_{jn} Q_{ko} Q_{lp} \tilde{C}'_{mnop} \quad (5.18)$$

mit

$$\begin{aligned} Q_{i1} &= \begin{bmatrix} \cos \alpha \cos \gamma - \sin \alpha \cos \beta \sin \gamma \\ \sin \alpha \cos \gamma + \cos \alpha \cos \beta \sin \gamma \\ \sin \beta \sin \gamma \end{bmatrix}, \\ Q_{i2} &= \begin{bmatrix} -\cos \alpha \sin \gamma - \sin \alpha \cos \beta \cos \gamma \\ -\sin \alpha \sin \gamma + \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma \\ \sin \beta \cos \gamma \end{bmatrix}, \\ Q_{i3} &= \begin{bmatrix} \sin \alpha \sin \beta \\ -\cos \alpha \sin \beta \\ \cos \beta \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (5.19)$$

Alternativ ist die Transformation von

$$\tilde{\mathbf{C}} = \mathbf{R} : \tilde{\mathbf{C}}' : \mathbf{R}^T \quad (5.20)$$

mit Hilfe des Rotationstensors 4. Stufe

$$\mathbf{R} = R_{ijmn} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_m \otimes \mathbf{e}_n = Q_{im} Q_{jn} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_m \otimes \mathbf{e}_n \quad (5.21)$$

und dessen Transponierter

$$\mathbf{R}^T = R_{mnij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_m \otimes \mathbf{e}_n = Q_{mi} Q_{nj} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_m \otimes \mathbf{e}_n \quad (5.22)$$

beschreibbar, wobei  $\mathbf{R}$  aus dem Rotationstensor 2. Stufe zusammengesetzt wird. Aus Gl. (5.20) folgt die Transformationsvorschrift für den effektiven Nachgiebigkeitstensor

$$\tilde{\mathbf{F}} = \tilde{\mathbf{C}}^{-1} = \mathbf{R}^{-T} : \tilde{\mathbf{F}}' : \mathbf{R}^{-1} , \quad (5.23)$$

mit dem das Verformungsverhalten des RVEs unter äußerer Beanspruchung beschreibbar ist. Die Mittelung von  $\tilde{\mathbf{F}}$  über sämtliche Orientierungen erfolgt mit

$$\tilde{\mathbf{F}} = \frac{1}{8\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \mathbf{R}^{-T} : \tilde{\mathbf{F}}' : \mathbf{R}^{-1} \sin \beta \, d\alpha \, d\beta \, d\gamma . \quad (5.24)$$

Auswerten von Gl. (5.24) ergibt unter Berücksichtigung der Symmetrie von  $\tilde{\mathbf{F}}$  und  $\tilde{\mathbf{F}}'$

$$\left. \begin{aligned} \tilde{F}_{1111} &= \frac{3}{15} (\tilde{F}'_{1111} + \tilde{F}'_{2222} + \tilde{F}'_{3333}) + \frac{2}{15} (\tilde{F}'_{1122} + \tilde{F}'_{1133} + \tilde{F}'_{2233}) \\ &\quad + \frac{4}{15} (\tilde{F}'_{1212} + \tilde{F}'_{1313} + \tilde{F}'_{2323}) = \tilde{F}_{2222} = \tilde{F}_{3333} , \\ \tilde{F}_{1122} &= \frac{1}{15} (\tilde{F}'_{1111} + \tilde{F}'_{2222} + \tilde{F}'_{3333}) + \frac{4}{15} (\tilde{F}'_{1122} + \tilde{F}'_{1133} + \tilde{F}'_{2233}) \\ &\quad - \frac{2}{15} (\tilde{F}'_{1212} + \tilde{F}'_{1313} + \tilde{F}'_{2323}) = \tilde{F}_{1133} = \tilde{F}_{2233} , \\ \tilde{F}_{1212} &= \frac{1}{2} (\tilde{F}_{1111} - \tilde{F}_{1122}) = \tilde{F}_{1313} = \tilde{F}_{2323} . \end{aligned} \right\} \quad (5.25)$$

Unter Porendruck hingegen charakterisiert der effektive Nachgiebigkeitstensor

$$\tilde{\mathbf{F}}_K = \mathbf{Q}^{-T} \cdot \tilde{\mathbf{F}}'_K \cdot \mathbf{Q}^{-1} \quad (5.26)$$

das Verformungsverhalten des RVEs. Dieser ist im Gegensatz zu  $\tilde{\mathbf{F}}$  ein Tensor 2. Stufe. Die Mittelung von  $\tilde{\mathbf{F}}_K$  über sämtliche Orientierungen führt auf den isotropisierten effektiven Nachgiebigkeitstensor

$$\tilde{\mathbf{F}}_K = \frac{1}{8\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \mathbf{Q}^{-T} \cdot \tilde{\mathbf{F}}'_K \cdot \mathbf{Q}^{-1} \sin \beta \, d\alpha \, d\beta \, d\gamma , \quad (5.27)$$

dessen Komponenten unter Berücksichtigung der Symmetrie von  $\tilde{\mathbf{F}}'_K$  bestimmt sind zu

$$\left. \begin{aligned} \tilde{F}_{K11} = \tilde{F}_{K22} = \tilde{F}_{K33} &= \frac{1}{3} (\tilde{F}'_{K11} + \tilde{F}'_{K22} + \tilde{F}'_{K33}) , \\ \tilde{F}_{K12} = \tilde{F}_{K21} = \tilde{F}_{K23} = \tilde{F}_{K32} = \tilde{F}_{K13} = \tilde{F}_{K31} &= 0 . \end{aligned} \right\} \quad (5.28)$$

Erfolgt die Isotropisierung lediglich in  $x_1$ - $x_2$ -Ebene, so folgt mit dem Rotationstensor

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.29)$$

unter Berücksichtigung der Symmetrie von  $\tilde{\mathbf{F}}$ ,  $\tilde{\mathbf{F}}'$  und  $\tilde{\mathbf{F}}_K$

$$\left. \begin{aligned} \tilde{F}_{1111} &= \frac{3}{8} (\tilde{F}'_{1111} + \tilde{F}'_{2222}) + \frac{1}{4} \tilde{F}'_{1122} + \frac{1}{2} \tilde{F}'_{1212} = \tilde{F}_{2222} , \\ \tilde{F}_{1122} &= \frac{1}{8} (\tilde{F}'_{1111} + \tilde{F}'_{2222}) + \frac{3}{4} \tilde{F}'_{1122} - \frac{1}{2} \tilde{F}'_{1212} , \\ \tilde{F}_{1133} &= \frac{1}{2} (\tilde{F}'_{1133} + \tilde{F}'_{2233}) = \tilde{F}_{2233} , \quad \tilde{F}_{3333} = \tilde{F}'_{3333} , \\ \tilde{F}_{1212} &= \frac{1}{2} (\tilde{F}_{1111} - \tilde{F}_{1122}) , \quad \tilde{F}_{1313} = \frac{1}{2} (\tilde{F}'_{1313} + \tilde{F}'_{2323}) = \tilde{F}_{2323} , \end{aligned} \right\} \quad (5.30)$$

$$\left. \begin{aligned} \tilde{F}_{K11} &= \tilde{F}_{K22} = \frac{1}{2} (\tilde{F}'_{K11} + \tilde{F}'_{K22}) , \quad \tilde{F}_{K33} = \tilde{F}'_{K33} , \\ \tilde{F}_{K12} &= \tilde{F}_{K21} = \tilde{F}_{K23} = \tilde{F}_{K32} = \tilde{F}_{K13} = \tilde{F}_{K31} = 0 . \end{aligned} \right\} \quad (5.31)$$

Die mittels Gl. (5.30) und (5.31) definierten effektiven Nachgiebigkeitstensoren  $\tilde{\mathbf{F}}$  und  $\tilde{\mathbf{F}}_K$  charakterisieren transversal isotropes Verhalten.

## 5.2 Modellbildung

In dieser Arbeit ist das Ziel der mikromechanischen Analyse die Bestimmung der Auswirkungen von Rissbildung und -wachstum auf das Verformungsverhalten bei äußerer Beanspruchung und Porendruck. Dabei erfolgt die Beschreibung von Veränderungen der Mikrostruktur im makromechanischen Modell mit Hilfe von Schädigungstensoren, über die die effektiven Materialeigenschaften definiert sind. Die Bestimmung effektiver Materialeigenschaften erfordert eine Modellierung der Mikrostruktur im RVE. Nachfolgend wird die Modellbildung am Beispiel des Sulfattreibens erläutert, wobei konzeptionell zwei verschiedene Vorgehensweisen denkbar sind.

Eine Möglichkeit besteht darin, einen Ausschnitt der realen Mikrostruktur im RVE detailliert abzubilden. Bei unregelmäßiger Mikrostruktur ist die Anordnung der Komponenten im RVE willkürlich, so dass die Bestimmung effektiver Materialeigenschaften nur in Verbindung mit statistischen Homogenisierungsverfahren sinnvoll erscheint. Ferner ist eine detaillierte Abbildung der Mikrostruktur im RVE nur möglich, wenn die Materialeigenschaften sämtlicher Komponenten sowie deren Verbundeigenschaften bekannt sind. Eine systematische Untersuchung der im RVE abgebildeten Struktur ist aufgrund der Vielzahl von Parametern jedoch kaum möglich, was die allgemeine Anwendbarkeit eines daraus resultierenden makromechanischen Modells stark einschränkt.

In dieser Arbeit wird deshalb eine andere Vorgehensweise gewählt. Die Modellbildung erfolgt mit einer Einheitszelle, welche eine periodische Mikrostruktur beschreibt. Die unregelmäßige Verteilung der Komponenten im Beton erfordert allerdings eine vereinfachende Beschreibung der Mikrostruktur im RVE. Dem RVE wird hier eine Struktur



zugewiesen, die eine systematische Untersuchung der Auswirkungen von Rissbildung und -wachstum auf das Verformungsverhalten gestattet. Das daraus resultierende makromechanische Modell ist daher in seiner Anwendung flexibel.

## Repräsentatives Volumenelement

Bild 5.4 zeigt Beton auf unterschiedlichen Größenskalen. Makroskopisch wird Beton als homogener Werkstoff angesehen, während auf mesoskopischer Skala Zuschlag und Zementstein das Verhalten bestimmen. Auf der Mikroskala hingegen beeinflussen im Wesentlichen die im Zementstein vorhandenen Poren die Eigenschaften des Betons.

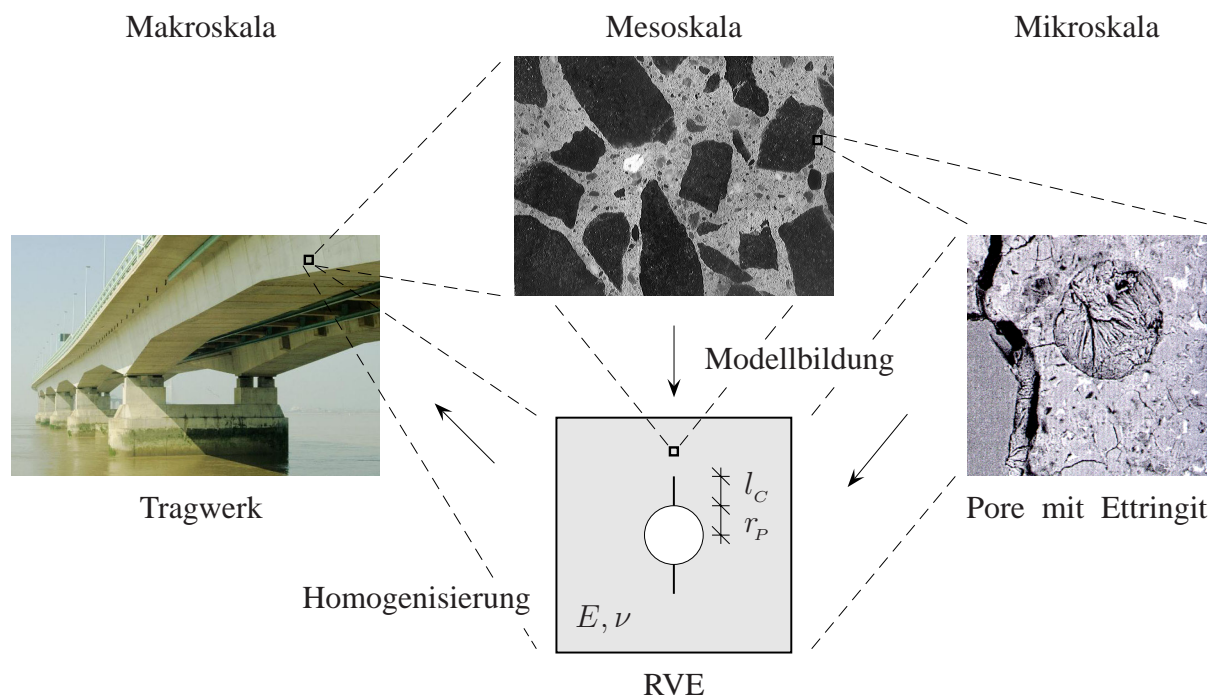


Bild 5.4: Mikromechanisches Modell

Als Ursache für die Schädigung von Beton bei Sulfattreiben werden die aus Rekristallisationsprozessen im Porenraum entstehenden Drücke angesehen. Gefügeschädigende Drücke entstehen jedoch nur in Poren bestimmter Größe. Daher werden im mikromechanischen Modell lediglich die für den Schädigungsprozess relevanten Poren in Form einer einzelnen Zylinderpore berücksichtigt. Die übrigen Poren sowie der Zuschlag und der Zementstein werden in einer Matrix zusammengefasst. Somit ist auf mikroskopischer Modellebene nur das Verformungsverhalten der Matrix zu modellieren.

Die Berücksichtigung unterschiedlicher Phänomene, wie inelastisches Verhalten und Kriechen, auf mikroskopischer Modellebene würde dazu führen, dass auf makroskopischer Modellebene infolge der Homogenisierung eine Unterscheidung der Phänomene nicht mehr möglich ist. Zudem ist ein beliebiger Verformungszustand des RVEs bei

nichtlinearem Verhalten einer Komponente nicht mit Einheitsverformungszuständen beschreibbar, da das Superpositionsprinzip nicht gilt. Deshalb erfolgt die Modellierung des Verformungsverhaltens der Matrix mit Hilfe der linearen Elastizitätstheorie. Die hierfür erforderlichen Modellparameter, die Querdehnzahl  $\nu$  und der Elastizitätsmodul  $E$  der Matrix, können aus experimentellen Versuchen ermittelt werden.

Das rissfreie RVE, bestehend aus Matrix und Pore, repräsentiert die Materialstruktur von Beton im ungeschädigten Ausgangszustand, wobei die aus dem rissfreien RVE resultierenden effektiven Materialeigenschaften orthotropes Verhalten beschreiben. Beton weist im Ausgangszustand jedoch isotropes Verhalten auf, so dass für das rissfreie RVE eine Isotropisierung der effektiven Materialeigenschaften notwendig ist.

Erst Rissbildung und -wachstum bewirken anisotropes Verhalten. Zur Bestimmung der Auswirkungen von Rissbildung und -wachstum auf das Verformungsverhalten wird ein einzelner Riss im RVE abgebildet und die Risslänge systematisch variiert. Die Orientierung des Risses und damit auch die des RVEs hängt von der Beanspruchung ab und ist mit Variablen des makromechanischen Modells definiert, vergleiche Kapitel 6.

Die Parameter des mikromechanischen Modells sind somit

- die Risslänge  $l_C$ ,
- der Porenradius  $r_P$ ,
- die Querdehnzahl  $\nu$  der Matrix
- und der Elastizitätsmodul  $E$  der Matrix.

### Randbedingungen des RVEs

Nachfolgend werden die bereits in Abschnitt 5.1.3 vorgestellten Randbedingungen hinsichtlich ihrer Eignung für die Homogenisierung diskutiert.

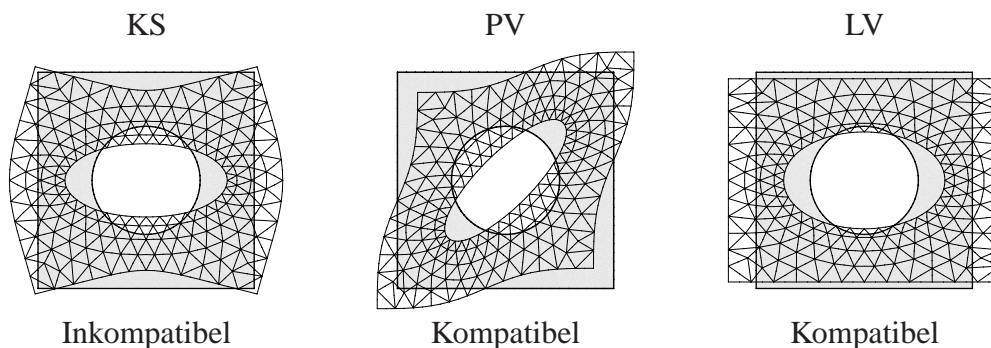


Bild 5.5: Verformung des RVEs in Abhängigkeit von der Art der Randbedingung

Benachbarte RVEs müssen zueinander kinematisch kompatibel sein. Deshalb scheiden konstante Spannungsrandbedingungen (KS) für die Homogenisierung von vorneherein aus, weil aufgrund der frei deformierbaren Elementränder inkompatible Verformungen auftreten, wie Bild 5.5 verdeutlicht. Bei linearen Verschiebungsrandbedingungen (LV) hingegen ist die kinematische Kompatibilität stets gewährleistet, während diese bei periodischen Verschiebungsrandbedingungen (PV) nur für den Fall einer periodischen Anordnung der Komponenten im RVE erfüllt ist. Unter dem Aspekt der kinematischen Kompatibilität sind sowohl lineare als auch periodische Verschiebungsrandbedingungen für die Homogenisierung geeignet.

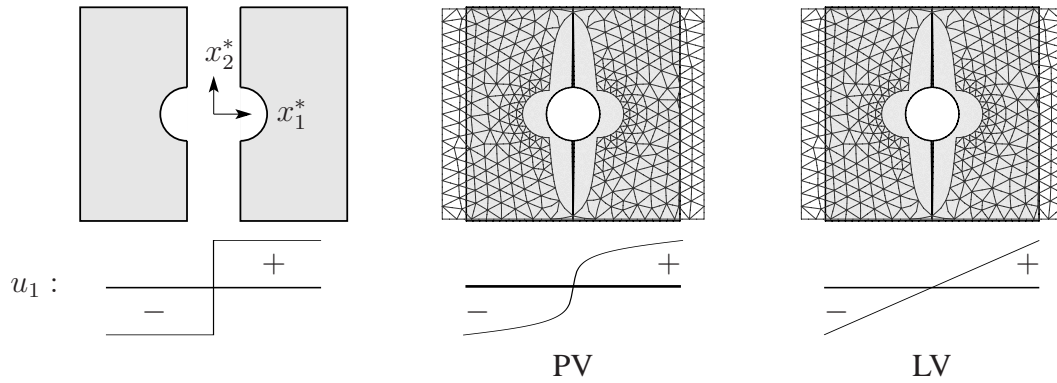


Bild 5.6: Verschiebung entlang des unteren bzw. oberen Elementrands

Bild 5.6 stellt den Verlauf der Komponente  $u_1$  des Verschiebungsvektors entlang des unteren bzw. oberen Elementrands für ein vollständig und nahezu gerissenes RVE dar. Eine Approximation der infolge des Risses entstehenden Diskontinuität im Verschiebungsfeld ist bei Vorgabe linearer Verschiebungsrandbedingungen nicht möglich. Daher erfolgt die Homogenisierung in dieser Arbeit mittels periodischer Verschiebungsrandbedingungen.

### 5.3 Bestimmung effektiver Materialeigenschaften

Für die Homogenisierung ist die Vorgabe einer hinreichenden Anzahl linear unabhängiger Einheitsverformungszustände im RVE notwendig. Die Untersuchung des beschriebenen RVEs kann im ebenen Verzerrungszustand erfolgen, was den numerischen Aufwand erheblich reduziert. Hierzu wird die elastische Verzerrung  $\varepsilon_{33}^{el}(\mathbf{x}^*)$  in Dickenrichtung über eine Eigendehnung  $\varepsilon_{33}^{eig}(\mathbf{x}^*)$  vorgegeben, die in der Verzerrungsbilanz

$$\varepsilon_{33}(\mathbf{x}^*) = \varepsilon_{33}^{el}(\mathbf{x}^*) + \varepsilon_{33}^{eig}(\mathbf{x}^*) \quad (5.32)$$

zu berücksichtigen ist. Für den ebenen Verzerrungszustand gilt  $\varepsilon_{33}(\mathbf{x}^*) = 0$ . Folglich ist bei Vorgabe eines konstanten Eigendehnungsfelds die homogenisierte Verzerrung  $\varepsilon_{33}^{el}$  dem negativen Wert der vorgegebenen Eigendehnung identisch. Die homogenisier-

te Spannung  $\sigma_{33}$  entspricht der um das Verhältnis von Porenvolumen zum Gesamtvolumen abgeminderten Spannung des poren- und rissfreien RVEs. Entsprechendes gilt für die aus den Einheitsverformungszuständen  $\hat{\gamma}_{13}$  und  $\hat{\gamma}_{23}$  resultierenden homogenisierten Spannungen  $\sigma_{13}$  und  $\sigma_{23}$ . Die homogenisierten Verzerrungen  $\gamma_{13} = \varepsilon_{13} + \varepsilon_{31}$  und  $\gamma_{23} = \varepsilon_{23} + \varepsilon_{32}$  hingegen sind denen des poren- und rissfreien RVEs identisch.

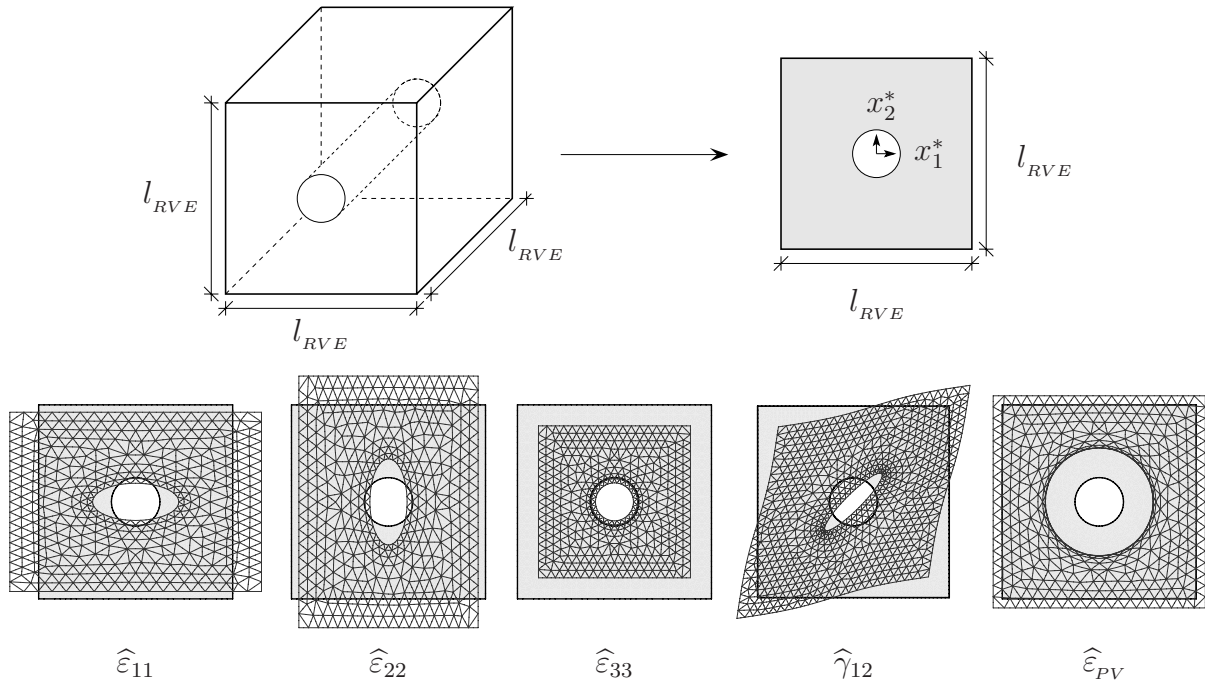


Bild 5.7: Einheitsverformungszustände des RVEs für den ebenen Verzerrungszustand

Bild 5.7 zeigt die Einheitsverformungszustände des RVEs bei äußerer Beanspruchung und Porendruck für den ebenen Verzerrungszustand. Aus den verschiedenen Einheitsverformungszuständen resultieren die homogenisierten Spannungen und Verzerrungen, mit denen die effektiven Materialeigenschaften des RVEs bestimmt werden.

## Spannungen und Verzerrungen auf Makroebene

Der homogenisierte Spannungstensor  $\sigma$  und der homogenisierte Verzerrungstensor  $\varepsilon$  entsprechen den räumlichen Mittelwerten des jeweiligen Felds im RVE und sind mit Gl. (5.2) bzw. (5.3) definiert. Somit gilt unter Berücksichtigung von Gl. (3.5) für die räumlichen Mittelwerte der Verzerrungen der Pore

$$\varepsilon_p = \frac{1}{2V_p} \int_{\partial\Omega_p^*} (\mathbf{n}(\mathbf{x}^*) \otimes \mathbf{u}(\mathbf{x}^*) + \mathbf{u}(\mathbf{x}^*) \otimes \mathbf{n}(\mathbf{x}^*)) \, d(\partial\Omega^*) , \quad (5.33)$$

wobei  $\mathbf{n}$  den Normalenvektor auf dem Rand  $\partial\Omega_p^*$  der Pore kennzeichnet. Der homogenisierte Verzerrungstensor  $\varepsilon_p$  ist laut Gl. (5.33) mit den Verschiebungen auf dem Rand

der Pore bestimmt. Dementsprechend kann die Bestimmung des homogenisierten Verzerrungstensors  $\varepsilon$  mit den Verschiebungen auf dem Rand  $\partial\Omega^*$  des RVEs erfolgen. Unter Berücksichtigung der in Bild 5.8 dargestellten Randverschiebungen gilt für die Komponenten des homogenisierten Verzerrungstensors  $\varepsilon$  in der  $x_1^*-x_2^*$ -Ebene

$$\varepsilon_{11} = \frac{2 \Delta u_1^n}{l_{RVE}}, \quad \varepsilon_{22} = \frac{2 \Delta u_2^n}{l_{RVE}}, \quad \gamma_{12} = \varepsilon_{12} + \varepsilon_{21} = \frac{2 \Delta u_1^s}{l_{RVE}} + \frac{2 \Delta u_2^s}{l_{RVE}}. \quad (5.34)$$

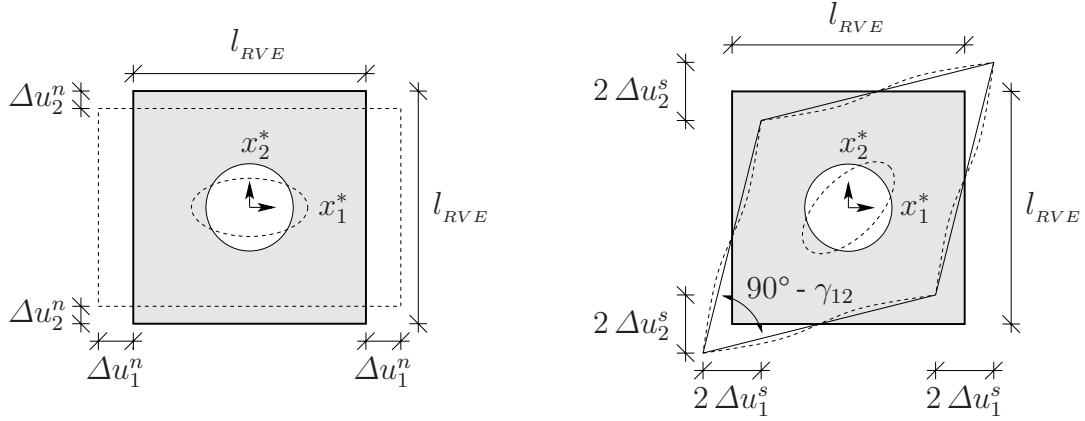


Bild 5.8: Verformungszustände des RVEs in der  $x_1^*-x_2^*$ -Ebene

In der Pore sind die Spannungen stets identisch null. Somit folgen für ein divergenz-freies Spannungsfeld  $\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$  unter Berücksichtigung von Gl. (5.5) sowie der Identität  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}^*) = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}^*) \cdot (\nabla \otimes \mathbf{x}^*)$  die räumlichen Mittelwerte der Spannungen zu

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} &= \frac{1}{V} \int_{\Omega_M^*} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}^*) \, d\Omega^* = \frac{1}{V} \int_{\Omega_M^*} ((\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}^*)) \otimes \mathbf{x}^* + \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}^*) \cdot (\nabla \otimes \mathbf{x}^*)) \, d\Omega^* \\ &= \frac{1}{V} \int_{\Omega_M^*} \nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}^*) \otimes \mathbf{x}^*) \, d\Omega^* = \frac{1}{V} \int_{\partial\Omega_M^*} \mathbf{n}(\mathbf{x}^*) \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}^*) \otimes \mathbf{x}^* \, d(\partial\Omega^*), \end{aligned} \quad (5.35)$$

wobei der Index  $M$  die Matrix kennzeichnet. Die aus Porendruck resultierenden Spannungen sind als Eigenspannungen zu interpretieren und im makromechanischen Modell separat zu berücksichtigen. Der homogenisierte Spannungstensor

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{V} \int_{\partial\Omega^*} \mathbf{n}(\mathbf{x}^*) \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}^*) \otimes \mathbf{x}^* \, d(\partial\Omega^*) \quad (5.36)$$

erfasst daher nur die aus äußerer Beanspruchung resultierenden Spannungen und ist mit den Spannungen auf dem Rand  $\partial\Omega^* \subset \partial\Omega_M^*$  des RVEs bestimmt.

Für die makroskopische Beschreibung des Verformungsverhaltens des RVEs unter äußerer Beanspruchung und Porendruck sind neben dem homogenisierten Spannungstensor  $\boldsymbol{\sigma}$  und dem homogenisierten Verzerrungstensor  $\varepsilon$  weitere Variablen erforderlich, deren Definition anhand einer energetischen Betrachtung erfolgt. Bild 5.9 zeigt das in-

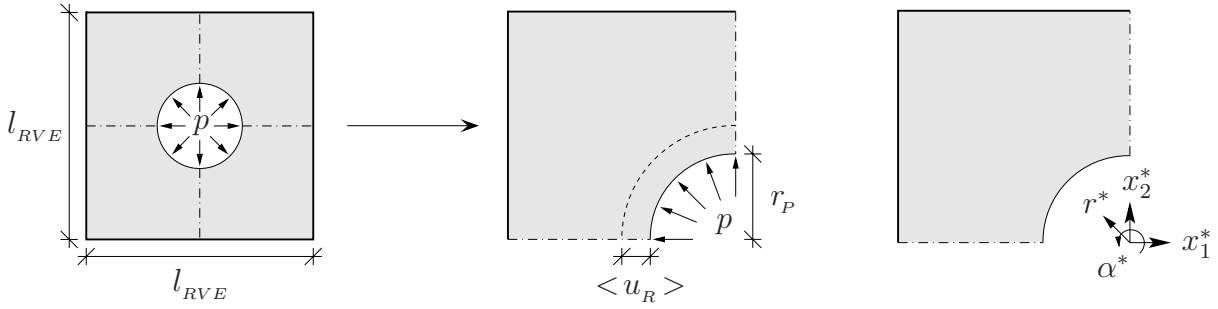


Bild 5.9: RVE unter Porendruck in der  $x_1$ - $x_2$ -Ebene

folge von Porendruck beanspruchte RVE. Mit der mittleren radialen Verschiebung

$$\langle u_R \rangle = \frac{1}{2\pi r_P} \int_0^{2\pi} u_R(\alpha^*, r^* = r_P) r_P d\alpha^* \quad (5.37)$$

des Porenrandes sowie dem Porendruck  $p$  ( $p < 0$ ) folgt die Energiedichte zu

$$\Pi = -p \langle u_R \rangle = \frac{2\pi r_P}{A_{RVE}} = -p \underbrace{\frac{\rho_P \pi r_P^2}{A_{RVE}}}_{\sigma_P} \underbrace{\frac{2 \langle u_R \rangle}{r_P}}_{\varepsilon_{PV}} = \sigma_P \varepsilon_{PV} , \quad (5.38)$$

wobei die Porosität  $\rho_P$  das Verhältnis von Porenfläche  $A_P$  zur Gesamtfläche  $A_{RVE}$  des RVEs angibt. Die Wichtung des Porendrucks mit der Porosität ergibt den bezogenen Porendruck  $\sigma_P$ , dessen energetisch konjugierte Variable  $\varepsilon_{PV}$  der volumetrischen Verzerrung der Pore in der  $x_1^*$ - $x_2^*$ -Ebene entspricht,

$$\frac{\Delta A_P}{A_P} = \frac{\pi (r_P + \langle u_R \rangle)^2 - \pi r_P^2}{\pi r_P^2} \approx \frac{2 \langle u_R \rangle}{r_P} . \quad (5.39)$$

Die Linearisierung von Gl. (5.39) ist unter der Voraussetzung kleiner Deformationen gerechtfertigt. Formal kann die Bestimmung der linearisierten volumetrischen Verzerrung der Pore mit Hilfe von Gl. (5.33) erfolgen.

### Spannungs-Verzerrungs-Beziehung auf Makroebene

Auf Makroebene bzw. im makromechanischen Modell beschreiben homogenisierte Größen das Verhalten des RVEs. So charakterisiert für den Fall elastischen Verformungsverhaltens die Gibbs-Energie

$$-\rho g^{el}(\boldsymbol{\sigma}, \sigma_P) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} : \tilde{\mathbf{F}} : \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma} : \tilde{\mathbf{F}}_K \sigma_P + \frac{1}{2} \sigma_P \tilde{F}_I \sigma_P \quad (5.40)$$

den energetischen Zustand des RVEs, wobei das Potential (5.40) neben den Spannungen den bezogenen Porendruck als weitere Zustandsvariable enthält. Partielles Ableiten des



Potentials nach den Zustandsvariablen ergibt die Zustandsgleichungen

$$\varepsilon = -\rho \frac{\partial g^{el}}{\partial \sigma} = \tilde{\mathbf{F}} : \sigma + \tilde{\mathbf{F}}_K \sigma_P, \quad (5.41)$$

$$\varepsilon_{PV} = -\rho \frac{\partial g^{el}}{\partial \sigma_P} = \tilde{\mathbf{F}}_K^T : \sigma + \tilde{F}_I \sigma_P, \quad (5.42)$$

die das elastische Verformungsverhalten des RVEs und der Pore auf Makroebene im globalen Koordinatensystem der Struktur beschreiben.

## Effektive Nachgiebigkeiten

Die Bestimmung effektiver Materialeigenschaften erfolgt mit den im lokalen Koordinatensystem des RVEs formulierten Spannungs-Verzerrungs-Beziehungen, die nachfolgend in Vektor-Matrix-Schreibweise angegeben sind,

$$\begin{bmatrix} \varepsilon' \\ \varepsilon_{PV}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{F}}' & \tilde{\mathbf{F}}_K' \\ \tilde{\mathbf{F}}_K'^T & \tilde{F}_I' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma' \\ \sigma_P' \end{bmatrix}. \quad (5.43)$$

Für Strukturberechnungen sind daher die effektiven Nachgiebigkeitstensoren  $\tilde{\mathbf{F}}'$  und  $\tilde{\mathbf{F}}_K'$  ins globale Koordinatensystem der Struktur zu transformieren, vergleiche Kapitel 6. Die effektive Nachgiebigkeit  $\tilde{F}_I'$  dagegen ist als skalare Größe koordinateninvariant.

In dieser Arbeit wird der Einfluss der Pore und des Risses auf die Materialeigenschaften separat erfasst. Zunächst erfolgt die Homogenisierung des rissfreien RVEs, das aus Pore und Matrix besteht. Hieraus folgen die effektiven Nachgiebigkeitstensoren  $\tilde{\mathbf{F}}_P'$ ,  $\tilde{\mathbf{F}}_{KP}'$  und  $\tilde{F}_{IP}'$ , mit denen allerdings lediglich orthotropes Verformungsverhalten beschreibbar ist. Die Mittelung der effektiven Nachgiebigkeiten über sämtliche Orientierungen des RVEs ergibt schließlich die isotropisierten effektiven Nachgiebigkeiten,

$$\tilde{\mathbf{F}}_P' \stackrel{(5.25)}{\Rightarrow} \tilde{\bar{\mathbf{F}}}_P = (\mathbf{I} - \mathbf{D}_P)^{-T} : \bar{\mathbf{F}} : (\mathbf{I} - \mathbf{D}_P)^{-1}, \quad (5.44)$$

$$\tilde{\mathbf{F}}_{KP}' \stackrel{(5.28)}{\Rightarrow} \tilde{\bar{\mathbf{F}}}_{KP} = (\mathbf{I} - \mathbf{D}_{KP})^{-T} \cdot \bar{\mathbf{F}}_K \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{D}_{KP})^{-1}, \quad (5.45)$$

$$\tilde{F}_{IP}' = \tilde{\bar{F}}_{IP} = (1 - D_{IP})^{-1} \bar{F}_I (1 - D_{IP})^{-1}, \quad (5.46)$$

die in dieser Arbeit den ungeschädigten Ausgangszustand repräsentieren. Bei verschwindend geringer Porosität sind die Schädigungstensoren  $\mathbf{D}_P$ ,  $\mathbf{D}_{KP}$  und  $\mathbf{D}_{IP}$ , die im makromechanischen Modell den Einfluss der Pore bzw. Porosität auf die Materialeigenschaften erfassen, identisch null. In diesem Fall erfolgt die Beschreibung des Verformungsverhaltens allein mit Hilfe der im unendlichen Halbraum definierten Nachgiebigkeitstensoren  $\bar{\mathbf{F}}$ ,  $\bar{\mathbf{F}}_K$  und  $\bar{F}_I$ .



Für das RVE mit Riss dagegen sind die effektiven Nachgiebigkeitstensoren definiert zu

$$\tilde{\mathbf{F}}' = \tilde{\mathbf{F}}_P + (\tilde{\mathbf{F}}'_C - \tilde{\mathbf{F}}'_P) = (\mathbf{I}^4 - \mathbf{D}_C)^{-T} : \tilde{\mathbf{F}}_P : (\mathbf{I}^4 - \mathbf{D}_C)^{-1}, \quad (5.47)$$

$$\tilde{\mathbf{F}}'_K = \tilde{\mathbf{F}}_{KP} + (\tilde{\mathbf{F}}'_{KC} - \tilde{\mathbf{F}}'_{KP}) = (\mathbf{I}^2 - \mathbf{D}_{KC})^{-T} \cdot \tilde{\mathbf{F}}_{KP} \cdot (\mathbf{I}^2 - \mathbf{D}_{KC})^{-1}, \quad (5.48)$$

$$\tilde{\mathbf{F}}'_I = \tilde{\mathbf{F}}_{IP} + (\tilde{\mathbf{F}}'_{IC} - \tilde{\mathbf{F}}'_{IP}) = (1 - D_{IC})^{-1} \tilde{\mathbf{F}}_{IP} (1 - D_{IC})^{-1}, \quad (5.49)$$

wobei die Tensoren  $\tilde{\mathbf{F}}'_C$ ,  $\tilde{\mathbf{F}}'_{KC}$  und  $\tilde{\mathbf{F}}'_{IC}$  aus der Homogenisierung des RVEs resultieren. Die Differenz der effektiven Nachgiebigkeiten im lokalen Koordinatensystem repräsentiert den Einfluss des Risses auf die Materialeigenschaften, den im makromechanischen Modell die Schädigungstensoren  $\mathbf{D}_C$ ,  $\mathbf{D}_{KC}$  und  $D_{IC}$  beschreiben.

### Nachgiebigkeiten im unendlichen Halbraum

Im unendlichen Halbraum existieren für eine Scheibe mit Loch analytische Lösungen [50], mit denen die Bestimmung der Nachgiebigkeitstensoren  $\bar{\mathbf{F}}$ ,  $\bar{\mathbf{F}}_K$  und  $\bar{\mathbf{F}}_I$  erfolgt. Für die Darstellung von Tensoren wird hier die Vektor-Matrix-Schreibweise verwendet.

Im unendlichen Halbraum geht die Porosität gegen null. Der Nachgiebigkeitstensor

$$\bar{\mathbf{F}} = \mathbf{F}' = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \quad (5.50)$$

entspricht daher dem der Matrix und ist mit dessen Materialkennwerten, der Querdehnzahl  $\nu$  und dem Elastizitätsmodul  $E$ , bestimmt. Mit Hilfe von  $\bar{\mathbf{F}}$  ist das Verformungsverhalten des RVEs bei äußerer Beanspruchung, die in Form von Verschiebungen oder Spannungen auf dem äußeren Rand des RVEs wirken, beschreibbar.

Analytische Lösungen für das Spannungs- und Verschiebungsfeld im RVE können bei Vorgabe konstanter Spannungsrandbedingungen mit der Airy'schen Spannungsfunktion ermittelt werden. Aus den analytischen Lösungen für das Verschiebungsfeld folgen unter Berücksichtigung von Gl. (5.33) die homogenisierten Verzerrungen der Pore,

$$\epsilon'_P = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 3 & -1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma'_{11} \\ \sigma'_{22} \\ \sigma'_{33} \\ \sigma'_{12} \\ \sigma'_{13} \\ \sigma'_{23} \end{bmatrix}, \quad (5.51)$$

wobei die Verzerrungen in  $x_3^*$ -Richtung denen des poren- und rissfreien RVEs identisch sind. Auswerten der volumetrischen Verzerrung der Pore in  $x_1^*$ - $x_2^*$ -Ebene mit Gl. (5.51) führt schließlich auf den orthotropen Nachgiebigkeitstensor

$$\mathbf{F}'_K{}^T = \frac{2}{E} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (5.52)$$

Die Mittelung von  $\mathbf{F}'_K{}^T$  über sämtliche Orientierungen des RVEs erfolgt mit Gl. (5.28) und ergibt den isotropisierten Nachgiebigkeitstensor

$$\overline{\mathbf{F}}_K{}^T = \frac{2}{3E} \begin{bmatrix} 2-\nu & 2-\nu & 2-\nu & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (5.53)$$

mit dem das Verformungsverhalten der Pore bei äußerer Beanspruchung beschreibbar ist. Bei Porendruck hingegen charakterisiert die Nachgiebigkeit

$$\overline{F}_I = F'_I = \frac{2(1+\nu)}{E \rho_p} + \frac{4}{E} \approx \frac{2(1+\nu)}{E \rho_p} \quad (5.54)$$

das Verformungsverhalten der Pore. Der 2. Term in Gl. (5.54) ist vernachlässigbar, weil die Porosität  $\rho_p$  im unendlichen Halbraum verschwindend gering ist. Trotz Abhängigkeit der Nachgiebigkeit  $\overline{F}_I$  von der Porosität nimmt die aus Porendruck resultierende volumetrische Verzerrung der Pore stets endliche Werte an, da der bezogene Porendruck definiert ist zu  $\sigma_p = -\rho_p p$ .

## 5.4 Ergebnisse der mikromechanischen Untersuchung

Im RVE werden Querdehnzahl der Matrix, Porenradius und Risslänge systematisch variiert. Die Variation des Elastizitätsmoduls  $E$  der Matrix hingegen ist nicht erforderlich, weil sämtliche Komponenten der Nachgiebigkeitstensoren  $\overline{\mathbf{F}}$ ,  $\overline{\mathbf{F}}_K$  und  $\overline{F}_I$  linear vom Faktor  $1/E$  abhängig sind.

### 5.4.1 Einfluss der Pore auf die Materialeigenschaften

Die Gesamtporosität von Beton beträgt 8 - 15 Volumen-% [106]. Daher wird der Einfluss der Pore bzw. Porosität auf die Materialeigenschaften bis zu einem Volumenverhältnis von Pore zu RVE von etwa 20 % untersucht.

### Vergleich mit analytischen Näherungsverfahren

Zunächst werden die Ergebnisse für das rissfreie RVE bei Vorgabe linearer Verschiebungsrandbedingungen (LV), periodischer Verschiebungsrandbedingungen (PV) und

konstanter Spannungsrandbedingungen (KS) den Ergebnissen analytischer Näherungsverfahren gegenübergestellt. Der Vergleich erfolgt für den ebenen Verzerrungszustand. Die Herleitungen der analytischen Näherungsverfahren sind in [52] angegeben, wobei diesen die Annahme zugrunde liegt, dass die Poren gleichmäßig verteilt sind. So sind für eine Scheibe mit Loch in Abhängigkeit vom Näherungsverfahren der effektive Elastizitätsmodul  $\tilde{E}$  und die effektive Querdehnzahl  $\tilde{\nu}$  bestimmt zu

- Dilute-Distribution-Methode (DD)

$$\tilde{E} = \frac{E}{1 + 3(1 - \nu^2)\rho_P}, \quad \tilde{\nu} = \frac{\nu + (1 - \nu^2)\rho_P}{1 + 3(1 - \nu^2)\rho_P}, \quad (5.55)$$

- Mori-Tanaka-Methode (MT)

$$\tilde{E} = \frac{(1 - \rho_P)E}{1 + (2 - 3\nu^2)\rho_P}, \quad \tilde{\nu} = \frac{\nu + (1 - \nu - \nu^2)\rho_P}{1 + (2 - 3\nu^2)\rho_P}, \quad (5.56)$$

- Selbstkonsistenz-Methode (SK)

$$\tilde{E} = (1 - 3(1 - \nu^2)\rho_P)E, \quad \tilde{\nu} = \nu + (1 - 3\nu - \nu^2 + 3\nu^3)\rho_P, \quad (5.57)$$

- Differentialschema (DS)

$$\tilde{E} = (1 - \rho_P)^{3(1-\nu^2)}E, \quad \tilde{\nu} = \frac{1}{3}(4 + (3\nu - 1)(1 - \rho_P)^{3(1-\nu^2)}) - 1. \quad (5.58)$$

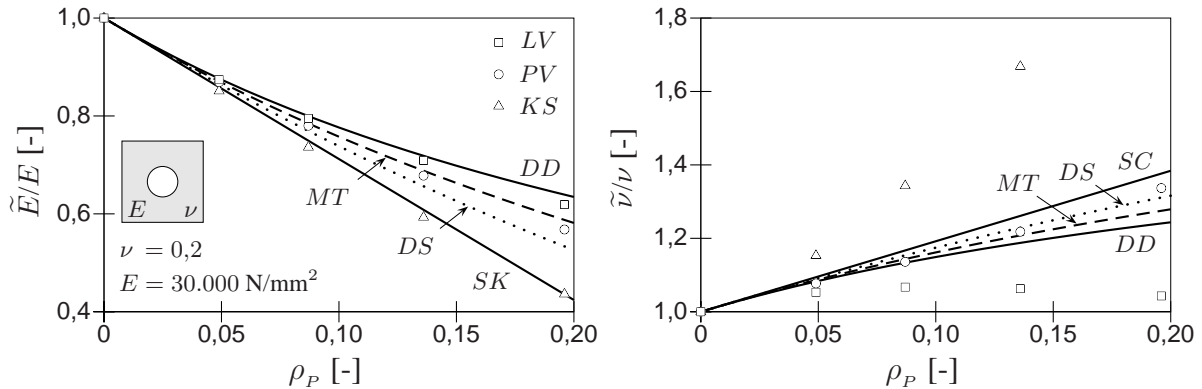


Bild 5.10: Vergleich des Konzepts des RVEs mit analytischen Näherungsverfahren

Mit dem effektiven Elastizitätsmodul und der effektiven Querdehnzahl ist isotropes Verformungsverhalten in  $x_1^*-x_2^*$ -Ebene beschreibbar. Das rissfreie RVE weist jedoch orthotropes Verformungsverhalten auf, so dass der effektive Nachgiebigkeitstensor  $\tilde{\mathbf{F}}_P'$  über sämtliche Orientierungen in  $x_1^*-x_2^*$ -Ebene zu mitteln ist. Erst dann ist ein Vergleich zwischen dem in dieser Arbeit verwendeten Konzept des repräsentativen Volumenelements und den analytischen Näherungsverfahren möglich. Die Mittelung des effektiven Nachgiebigkeitstensors  $\tilde{\mathbf{F}}_P'$  erfolgt mit Gl. (5.30) und ergibt den in  $x_1^*-x_2^*$ -Ebene isotropisierten effektiven Nachgiebigkeitstensor  $\tilde{\mathbf{F}}_P$ , mit dem der effektive Elastizitätsmodul  $\tilde{E} = 1/\tilde{F}_{P_{1111}}$  und die effektive Querdehnzahl  $\tilde{\nu} = -\tilde{F}_{P_{1122}}/\tilde{F}_{P_{1111}}$  bestimmt sind.

In Bild 5.10 sind die hinsichtlich der Homogenisierungsstrategie unterschiedlichen Verfahren gegenübergestellt. Während der effektive Elastizitätsmodul für das rissfreie RVE weitgehend mit den Lösungen der analytischen Näherungsverfahren übereinstimmt, sind für die effektive Querdehnzahl in Abhängigkeit von der Art der Randbedingung deutliche Unterschiede zu erkennen. Lediglich die Vorgabe periodischer Verschiebungsrandbedingungen führt zu ähnlichen Ergebnissen für die effektive Querdehnzahl wie die analytischen Näherungsverfahren. Aufgrund des deutlichen Einflusses der Art der Randbedingung erfolgen weitere Untersuchungen.

### Auswirkungen der Porenvolumenverteilung

Zur Bestimmung der Auswirkungen der Porenvolumenverteilung auf die in  $x_1^*-x_2^*$ -Ebene isotropisierten effektiven Nachgiebigkeiten wird das Volumen der im RVE berücksichtigten Einzelpore auf vier bzw. sechzehn äquiradiale Poren verteilt. Findet die Mittelung des effektiven Nachgiebigkeitstensors  $\tilde{\mathbf{F}}_P'$  dagegen über sämtliche Orientierungen des RVEs statt, so ist der Einfluss der Art der Randbedingung deutlich geringer. Deshalb erfolgt der Vergleich mit den in  $x_1^*-x_2^*$ -Ebene isotropisierten effektiven Nachgiebigkeiten bzw. den daraus resultierenden Größen  $\tilde{E}$  und  $\tilde{\nu}$ .

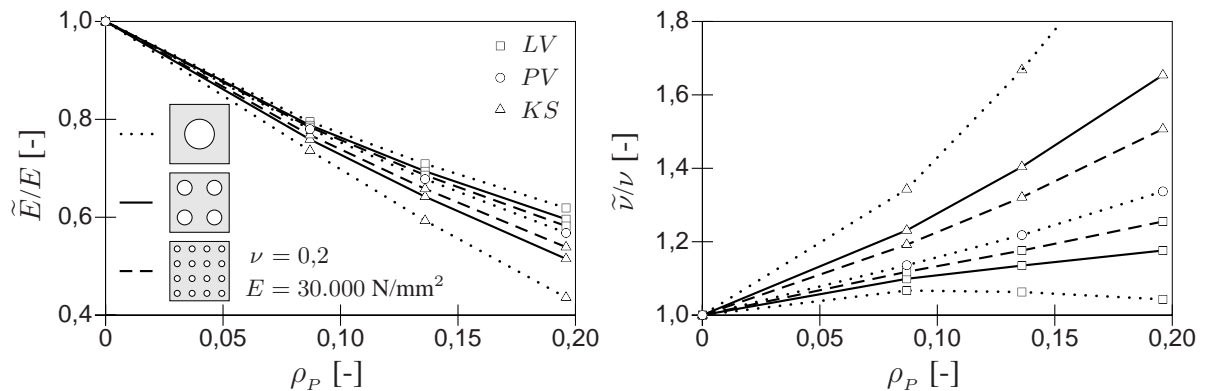


Bild 5.11: Auswirkungen der Porenvolumenverteilung auf die Materialeigenschaften

Für eine regelmäßige Anordnung der Poren verdeutlicht Bild 5.11 in Abhängigkeit von der Art der Randbedingung die Auswirkungen der Porenvolumenverteilung auf den effektiven Elastizitätsmodul und die effektive Querdehnzahl. Die Porenvolumenverteilung hat bei Vorgabe periodischer Verschiebungsrandbedingungen (PV) keinen Einfluss auf die Ergebnisse, was die stark vereinfachte Beschreibung der Mikrostruktur im RVE rechtfertigt. Bei linearen Verschiebungs- (LV) und konstanten Spannungsrandbedingungen (KS) hingegen treten zum Teil deutliche Abweichungen auf. Erst mit feiner werdender Porenvolumenverteilung findet eine Annäherung der Ergebnisse statt. Gleiches gilt für die effektive Nachgiebigkeit  $\tilde{F}_{IP}'$  und die aus dem effektiven Nachgiebigkeitstensor  $\tilde{\mathbf{F}}_{KP}'$  resultierenden isotropisierten effektiven Nachgiebigkeiten. Periodische

Verschiebungsrandbedingungen sind daher die bestmögliche Wahl für die Homogenisierung. Selbst eine unregelmäßige Anordnung der Poren im RVE beeinflusst bei Vorgabe periodischer Verschiebungsrandbedingungen den effektiven Elastizitätsmodul und die effektive Querdehnzahl nur geringfügig.

## Schädigungstensoren

Für das rissfreie RVE werden Querdehnzahl der Matrix und Porenradius systematisch variiert. Den Einfluss der Pore auf die Materialeigenschaften beschreiben bei vollständiger Kopplung von äußerer Beanspruchung und Porendruck die Schädigungstensoren

$$\mathbf{D}_P = \begin{bmatrix} D_{P_{1111}} & D_{P_{1122}} & D_{P_{1122}} & 0 & 0 & 0 \\ D_{P_{1122}} & D_{P_{1111}} & D_{P_{1122}} & 0 & 0 & 0 \\ D_{P_{1122}} & D_{P_{1122}} & D_{P_{1111}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{P_{1212}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & D_{P_{1212}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{P_{1212}} \end{bmatrix}, \quad (5.59)$$

$$\mathbf{D}_{KP}^T = \begin{bmatrix} D_{KP_{11}} & D_{KP_{11}} & D_{KP_{11}} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.60)$$

und  $D_{IP}$ , mit denen die Modellierung einer aus Porenwachstum resultierenden isotropen Schädigung im makromechanischen Modell möglich ist.

Die Schädigungstensoren sind bei gegebener Nachgiebigkeit mit den quadratischen Gln. (5.44) - (5.46) zu ermitteln und nur für bestimmte Parameterkonstellationen im RVE berechnet. Die Berechnungsergebnisse dienen als Grundlage für die Approximation der Schädigungstensoren. So folgen mit der Zielfunktion

$$D(\rho_P) = k_1 \rho_P^{z_1} + k_2 \rho_P^{z_2} \quad (5.61)$$

nach Anwenden der Fehlerquadratmethode die unabhängigen Komponenten der Schädigungstensoren zu

$$\left. \begin{aligned} D_{P_{1111}} &= (0,63 + 4,89 \nu^4) \rho_P^{4/5} + (0,69 - 6,07 \nu^4) \rho_P^{12/5}, \\ D_{P_{1212}} &= (0,68 - 0,52 \nu) \rho_P^{4/5} + (0,69 + 0,65 \nu) \rho_P^{11/5}, \end{aligned} \right\} \quad (5.62)$$

$$D_{KP_{11}} = 0,33 \rho_P^{4/5} + 0,94 \rho_P^3, \quad (5.63)$$

$$D_{IP} = (0,62 - 0,39 \nu) \rho_P^{4/5} + (0,61 + 0,41 \nu) \rho_P^3, \quad (5.64)$$

wobei die Exponenten von  $\nu$  und  $\rho_P$  vorgegeben werden, um den Schädigungsverlauf adäquat zu beschreiben. Für die Komponente  $D_{P_{1122}}$  hingegen gilt

$$D_{P_{1122}} = D_{P_{1111}} - D_{P_{1212}}. \quad (5.65)$$

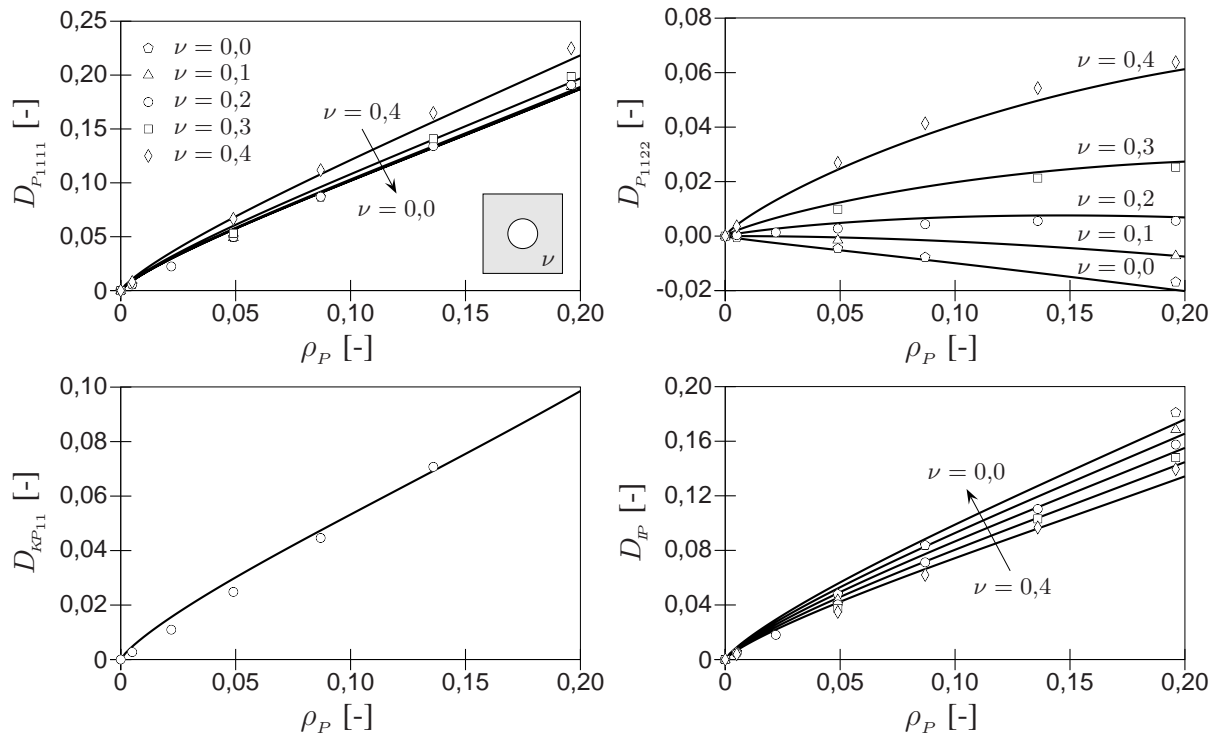


Bild 5.12: Schädigung über Porosität für unterschiedliche Querdehnraten

Bild 5.12 zeigt den Schädigungsverlauf in Abhängigkeit von der Querdehnrzahl der Matrix und der Porosität, wobei Symbole Berechnungsergebnisse und Linien das Ergebnis der Approximation kennzeichnen.

#### 5.4.2 Einfluss des Risses auf die Materialeigenschaften

Zur Charakterisierung des Zustands des RVEs dient neben der Porosität die bezogene Risslänge  $\kappa_C = 2l_C/(l_{RVE} - 2r_P)$ , die dem Verhältnis von Risslänge  $l_C$  zum verbleibenden Materialquerschnitt entspricht. Die bezogene Risslänge nimmt für das rissfreie RVE den Wert null an. Für das vollständig gerissene RVE hingegen beträgt der Wert eins. Demnach gilt für den Definitionsbereich der bezogenen Risslänge  $0 \leq \kappa_C \leq 1$ .

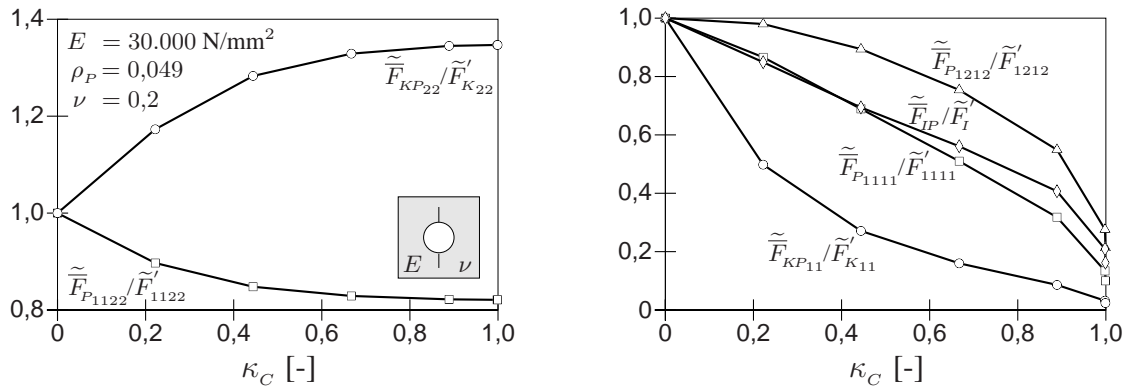


Bild 5.13: Normierte effektive Nachgiebigkeiten über bezogener Risslänge

Bild 5.13 zeigt den Verlauf der einzelnen Komponenten der effektiven Nachgiebigkeitstensoren  $\tilde{\mathbf{F}}'$ ,  $\tilde{\mathbf{F}}'_K$  und  $\tilde{\mathbf{F}}'_I$  in Abhängigkeit von der bezogenen Risslänge, wobei Querdehnzahl und Elastizitätsmodul der Matrix sowie Porosität konstant sind. Die dargestellten Komponenten sind auf die entsprechenden effektiven Nachgiebigkeiten des rissfreien RVEs normiert. Kennzeichnend für die Komponenten  $F'_{1122}$  und  $F'_{K22}$  ist ein degressiver Verlauf, wobei ab einer bezogenen Risslänge von etwa 0,9 keine nennenswerten Änderungen mehr auftreten. Die Komponenten  $F'_{1111}$ ,  $F'_{1212}$ ,  $F'_{K11}$  und  $F'_I$  hingegen weisen zumindest für den Bereich  $\kappa_C \geq 0,9$  progressives Verhalten auf, während die Komponenten  $\tilde{F}'_{2222}$ ,  $\tilde{F}'_{3333}$ ,  $\tilde{F}'_{1313}$ ,  $\tilde{F}'_{2323}$ ,  $\tilde{F}'_{1133}$ ,  $\tilde{F}'_{2233}$  und  $\tilde{F}'_{K33}$  konstant bleiben. Hinsichtlich des Verlaufs der effektiven Nachgiebigkeiten sind somit drei wesentliche Charakteristiken zu unterscheiden.

## Schädigungstensoren

Den Einfluss des Risses auf die Materialeigenschaften beschreiben bei vollständiger Kopplung von äußerer Beanspruchung und Porendruck die Schädigungstensoren

$$\mathbf{D}_C = \begin{bmatrix} D_{C1111} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ D_{C2211} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ D_{C3311} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{C1212} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (5.66)$$

$$\mathbf{D}_{KC}^T = \begin{bmatrix} D_{KC11} & D_{KC22} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.67)$$

und  $D_{IC}$ , mit denen im makromechanischen Modell die Beschreibung der mit Rissbildung und -wachstum einhergehenden anisotropen Schädigung erfolgt. Dabei bietet ein unsymmetrischer Schädigungstensor  $\mathbf{D}_C$  gegenüber einem symmetrischen den Vorteil, dass eine einfachere Darstellung der Bestimmungsgleichung einzelner Komponenten des Schädigungstensors möglich ist. Aus der Bedingung  $\tilde{F}'_{1133} = \tilde{\bar{F}}_{P1133}$  folgt mit Gl. (5.47) die Bestimmungsgleichung für die Komponente

$$D_{C3311} = - \frac{\tilde{\bar{F}}_{P1133} D_{C1111} + \tilde{\bar{F}}_{P2233} D_{C2211}}{\tilde{\bar{F}}_{P3333}}. \quad (5.68)$$

Ferner zeigen die Berechnungsergebnisse, dass für den Bereich  $0,9 \leq \kappa_C \leq 1$  die Bedingung  $\tilde{F}'_{1122} = \text{const}$  gilt, aus der die Bestimmungsgleichung für die Komponente

$$D_{C2211} = \frac{(\tilde{F}'_{1122}(\kappa_C = 0,9) \tilde{\bar{F}}_{P3333} - \tilde{\bar{F}}_{P1133} \tilde{\bar{F}}_{P2233})}{(1 - D_{C1111})^{-1} (\tilde{\bar{F}}_{P2222} \tilde{\bar{F}}_{P3333} - \tilde{\bar{F}}_{P2233}^2)} + \frac{\tilde{\bar{F}}_{P1133} \tilde{\bar{F}}_{P2233} - \tilde{\bar{F}}_{P1122} \tilde{\bar{F}}_{P3333}}{\tilde{\bar{F}}_{P2222} \tilde{\bar{F}}_{P3333} - \tilde{\bar{F}}_{P2233}^2} \quad (5.69)$$

resultiert. Somit enthält der Schädigungstensor  $\mathbf{D}_C$  im Bereich  $0,9 \leq \kappa_C \leq 1$  lediglich zwei unabhängige Komponenten.



Die Schädigungstensoren sind bei gegebener Nachgiebigkeit mit den quadratischen Gln. (5.47) - (5.49) zu ermitteln. Für die Approximation der Schädigungstensoren wird der Definitionsbereich der bezogenen Risslänge unterteilt, um den starken Anstieg der Schädigung im Bereich  $0,9 \leq \kappa_C \leq 1$  separat beschreiben zu können. Im Bereich  $0 \leq \kappa_C < 0,9$  erfolgt die Approximation der Schädigungstensoren mit Hilfe der Fehlerquadratmethode unter Verwendung der Zielfunktion

$$D(\kappa_C) = k_1 \kappa_C^{z_1} + k_2 \kappa_C^{z_2} . \quad (5.70)$$

Für die unabhängigen Komponenten der Schädigungstensoren sind die Faktoren und Exponenten der Zielfunktion bestimmt zu

$$\left. \begin{aligned} D_{C_{1111}} : k_1 &= (1 - \rho_P) (0,47 + 1,23 \nu^2 + (0,14 - 0,39 \nu) \rho_P^{0,20}) , \\ z_1 &= 1,37 + 4,41 \rho_P^{2,50} , \quad k_2 = 0 , \quad z_2 = 1 , \\ D_{C_{2211}} : k_1 &= -0,20 + 2,25 \nu^2 + (-0,14 - 3,36 \nu^2) \rho_P^{0,57} , \quad z_1 = 1,17 , \\ k_2 &= 0,21 + 0,25 \nu + (0,54 - 0,22 \nu) \rho_P^{1,57} , \quad z_2 = 1,52 , \\ D_{C_{1212}} : k_1 &= (1 - \rho_P)^{1,49} (0,42 - 0,29 \nu) , \quad z_1 = 2,07 + 4,31 \rho_P , \\ k_2 &= 0 , \quad z_2 = 1 , \end{aligned} \right\} \quad (5.71)$$

$$\left. \begin{aligned} D_{KC_{11}} : k_1 &= 0,91 - 0,57 \rho_P^{0,50} , \quad z_1 = 0,10 + 2,50 \rho_P^{0,50} , \\ k_2 &= 0 , \quad z_2 = 1 , \\ D_{KC_{22}} : k_1 &= (1 - \rho_P)^6 (-0,24 - 0,04 \nu) , \quad z_1 = 0,10 + 1,59 \rho_P^{0,50} , \\ k_2 &= 0 , \quad z_2 = 1 , \end{aligned} \right\} \quad (5.72)$$

$$\left. \begin{aligned} D_{IC} : k_1 &= 0,62 - 0,34 \nu + (-0,34 + 0,14 \nu) \rho_P^{0,25} , \\ z_1 &= 0,35 + 3,27 \rho_P^{0,50} , \quad k_2 = 0 , \quad z_2 = 1 . \end{aligned} \right\} \quad (5.73)$$

Im Bereich  $0,9 \leq \kappa_C < 1$  hingegen beschreibt die Funktion

$$D(\kappa_C) = (1 - k_3) (1 - \exp(-z_3 (1/(100 - 100 \kappa_C) + 4/5))) + k_3 . \quad (5.74)$$

den Schädigungsverlauf, wobei aus numerischen Gründen der Wert  $\kappa_C = 1$  aus dem Definitionsbereich ausgeschlossen wird. Aus der Forderung, dass die Komponenten der Schädigungstensoren im gesamten Definitionsbereich von  $\kappa_C$  stetig differenzierbar sind, folgt

$$\left. \begin{aligned} k_3 &= 1 + \exp(0,9 z_3) (-1 + k_1 0,9^{z_1} + k_2 0,9^{z_2}) , \\ z_3 &= -\frac{k_1 z_1 0,9^{(z_1-1)} + k_2 z_2 0,9^{(z_2-1)}}{k_1 0,9^{z_1} + k_2 0,9^{z_2} - 1} . \end{aligned} \right\} \quad (5.75)$$

Einzig für die Komponente  $D_{KC22}$  erfolgt aufgrund ihres degressiven Verlaufs ein Ansatz nach Gl. (5.70) über den gesamten Definitionsbereich.

Bild 5.14 zeigt den Schädigungsverlauf in Abhängigkeit von der bezogenen Risslänge bei konstanter Porosität, wobei Symbole Berechnungsergebnisse und Linien das Ergebnis der Approximation kennzeichnen. Mit Ausnahme der Komponente  $D_{C2211}$  ist der Einfluss der Querdehnzahl der Matrix auf den Schädigungsverlauf gering. Bild 5.15 hingegen verdeutlicht den Einfluss der Porosität auf den Schädigungsverlauf. Insbesondere die Komponenten  $D_{KC11}$ ,  $D_{KC22}$  und  $D_{IC}$  weisen eine deutliche Abhängigkeit von der Porosität auf.

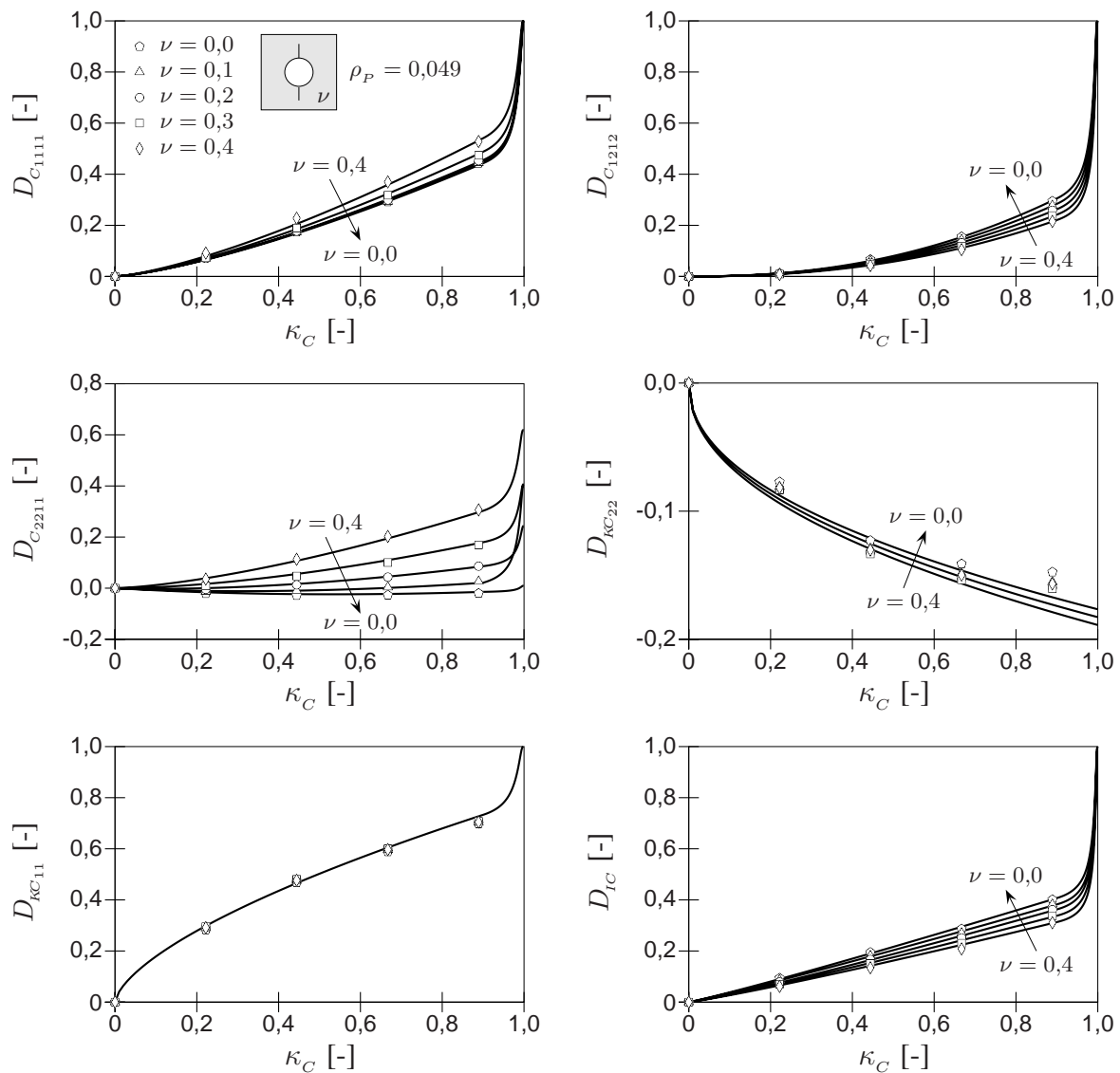


Bild 5.14: Schädigung über bezogener Risslänge bei konstanter Porosität

Die den Zustand des RVEs charakterisierenden Variablen  $\kappa_C$  und  $\rho_P$  stellen den Zusammenhang zwischen mikromechanischem und makromechanischem Modell her. Mit

Hilfe von  $\kappa_C$  und  $\rho_P$  sind Veränderungen der Mikrostruktur im makromechanischen Modell beschreibbar. Allerdings erfolgt hier die Beschreibung der anisotropen Schädigungsentwicklung mit Hilfe der modifizierten bezogenen Risslänge

$$\kappa_C^m = \begin{cases} \kappa_C & \text{für } 0 \leq \kappa_C < 0,9 \\ 1/(100 - 100 \kappa_C) + 4/5 & \text{für } 0,9 \leq \kappa_C < 1 \end{cases}, \quad (5.76)$$

die in Gl. (5.70) und (5.74) die bezogene Risslänge  $\kappa_C$  ersetzt. Der Definitionsbereich von  $\kappa_C^m$  besitzt im Gegensatz zu dem von  $\kappa_C$  keine obere Schranke, was unter modelltechnischen Aspekten von Vorteil ist.

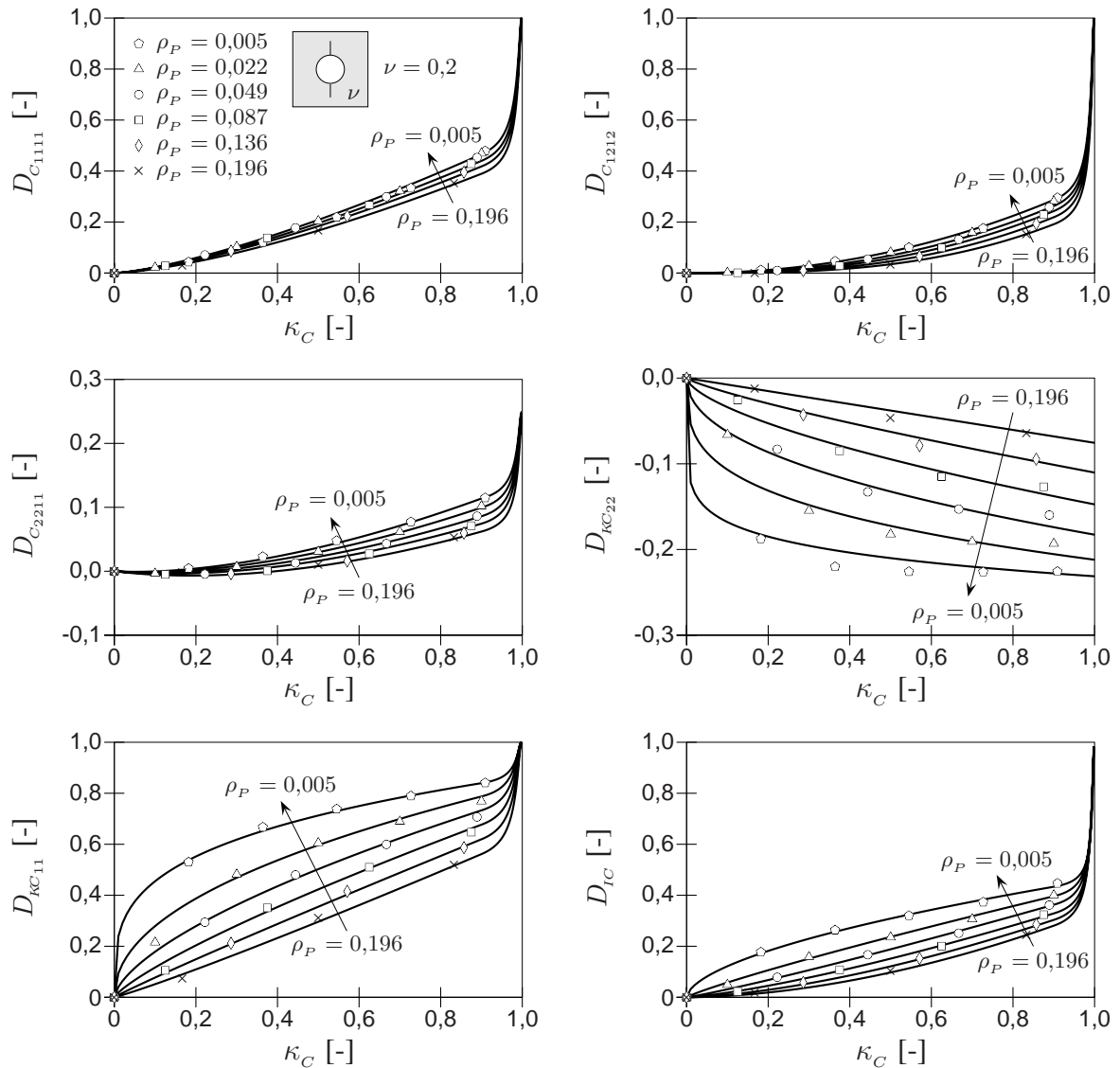


Bild 5.15: Schädigung über bezogener Risslänge bei konstanter Querdehnzahl

## 6 Makromechanisches Modell

Für die Modellierung des zeitunabhängigen Verformungsverhaltens von Beton sind elastisch-plastisches Materialverhalten und Schädigung zu berücksichtigen. Die hierfür erforderlichen Materialgleichungen werden zunächst im Rahmen der klassischen Kontinuumsmechanik unter Berücksichtigung thermodynamischer Aspekte diskutiert. Das daraus resultierende lokale Modell führt jedoch bei numerischer Simulation von Versagensprozessen zu diskretisierungsabhängigen Lösungen. Dieses für lokale Modelle typische Fehlverhalten kann durch Einführung nichtlokaler Variablen vermieden werden.

### 6.1 Lokales Modell

Das entwickelte Modell beruht auf der Plastizitätstheorie, die hier in Verbindung mit dem Prinzip der Energieäquivalenz und dem Konzept der effektiven Spannungen die Modellgrundlage bildet. Die Schädigung ist dabei über die effektiven Spannungen in den Fließbedingungen berücksichtigt, da nur so bei Verwendung spannungsabhängiger Fließkriterien eine adäquate Beschreibung des Verformungsverhaltens gelingt.

#### 6.1.1 Fließbedingungen

Die Modellierung des Verformungsverhaltens von Beton erfolgt im Rahmen der Mehrflächenplastizität mit Hilfe des Drucker-Prager-Kriteriums und eines modifizierten Rankine-Kriteriums. Dies gestattet eine flexible Anpassung des Modells an experimentelle Versuche. Allerdings sind beide Kriterien hier statt mit nominalen mit effektiven Spannungen formuliert.

Die aus dem Drucker-Prager-Kriterium resultierende Fließbedingung

$$F_D(\tilde{\sigma}, \eta_D) = \sigma_{VD}(\tilde{\sigma}) - \sigma_{FD}(\eta_D) \leq 0 \quad (6.1)$$

charakterisiert das Verhalten von Beton unter Druckbeanspruchung und hängt von der Vergleichsspannung

$$\sigma_{VD}(\tilde{\sigma}) = a_D I_1(\tilde{\sigma}) + \sqrt{J_2^D(\tilde{\sigma})} \quad (6.2)$$

und der Fließspannung  $\sigma_{FD}$  ab, wobei die Vergleichsspannung mit den Invarianten

$$\begin{aligned} I_1 &= \tilde{\sigma}_{11} + \tilde{\sigma}_{22} + \tilde{\sigma}_{33} , \\ J_2^D &= \tilde{\sigma}_{11}^2 + \tilde{\sigma}_{22}^2 + \tilde{\sigma}_{33}^2 - \tilde{\sigma}_{11}\tilde{\sigma}_{22} - \tilde{\sigma}_{11}\tilde{\sigma}_{33} - \tilde{\sigma}_{22}\tilde{\sigma}_{33} + 3\tilde{\sigma}_{12}^2 + 3\tilde{\sigma}_{13}^2 + 3\tilde{\sigma}_{23}^2 \end{aligned} \quad (6.3)$$

der effektiven Spannungen definiert ist. Unter Zugbeanspruchung hingegen erfolgt die Beschreibung des Verformungsverhaltens mit Hilfe eines modifizierten Rankine-Kriteriums. Die daraus resultierende Fließbedingung

$$F_R(\tilde{\sigma}, \eta_R) = \sigma_{VR}(\tilde{\sigma}) - \sigma_{FR}(\eta_R) \leq 0 \quad (6.4)$$

ist im Raum der effektiven Hauptspannungen  $\tilde{\sigma}_1 \geq \tilde{\sigma}_2 \geq \tilde{\sigma}_3$  formuliert und hängt von der Vergleichsspannung

$$\sigma_{VR}(\tilde{\sigma}) = \begin{cases} \tilde{\sigma}_1 & \text{für } \tilde{\sigma}_2 \leq f_R \\ f_R + \sqrt{(\tilde{\sigma}_1 - f_R)^2 + (\tilde{\sigma}_2 - f_R)^2} & \text{für } \tilde{\sigma}_2 > f_R \end{cases} \quad (6.5)$$

und der Fließspannung  $\sigma_{FR}$  ab. Aufgrund der Modifikation ist die Fließbedingung (6.4) stetig differenzierbar, was unter numerischen Aspekten von Vorteil ist.

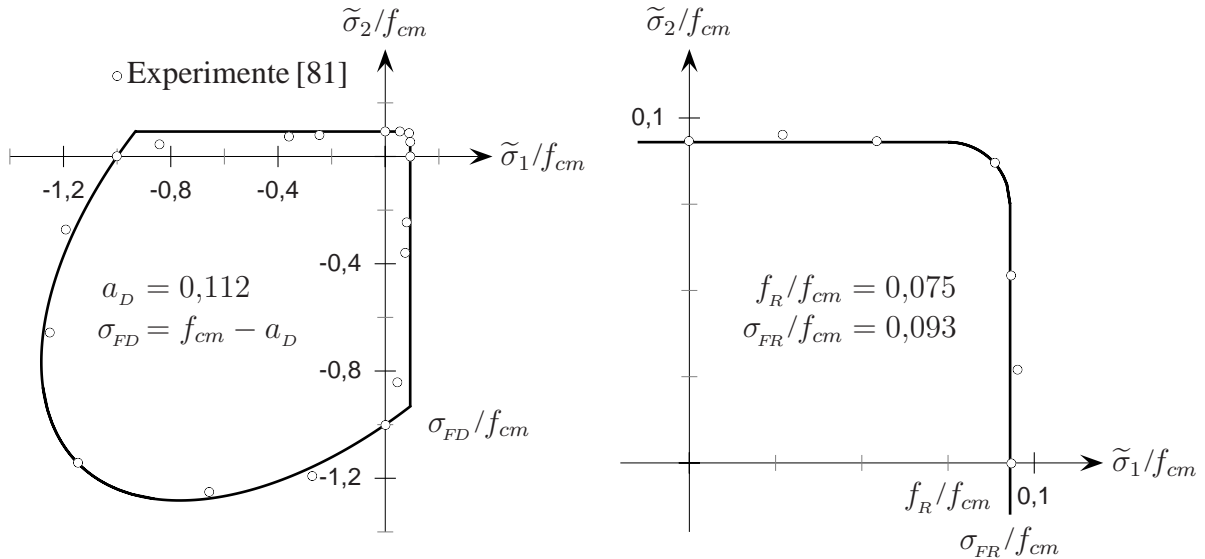


Bild 6.1: Maximal aufnehmbare Spannung bei biaxialer Beanspruchung

Die Materialmodellierung erfolgt in dieser Arbeit mit Hilfe einer isotropen Verfestigungshypothese. Somit gilt unter Berücksichtigung der inneren Variablen  $\eta_D$  und  $\eta_R$  sowie der Anfangsfließspannungen  $\sigma_{FD0}$  und  $\sigma_{FR0}$  für die Fließspannungen

$$\sigma_{FD}(\eta_D) = \sigma_{FD0} + \eta_D , \quad \sigma_{FR}(\eta_R) = \sigma_{FR0} + \eta_R . \quad (6.6)$$

Zur Anpassung der Modellparameter  $\sigma_{FD0}$ ,  $a_D$ ,  $\sigma_{FR0}$  und  $f_R$  dienen einaxiale und biaxiale Versuche. Wie Bild 6.1 für die maximal aufnehmbare Spannung zeigt, stimmt diese mit den Versuchen von Kupfer [81] sehr gut überein.

### 6.1.2 Schädigungseffektensor

Die Versagensmechanismen von Beton unter Zug- und Druckbeanspruchung weisen deutliche Unterschiede auf. Unter Zugbeanspruchung entsteht ein einzelner makroskopischer Riss, der zum Versagen des Materials führt. Die Modellierung der damit einhergehenden anisotropen Schädigung erfolgt entsprechend dem Rotating-Crack-Modell mit Hilfe eines rotierenden Risses, dessen Auswirkungen auf die Materialeigenschaften der Schädigungstensor 4. Stufe  $D_C$  (5.66) und der Rotationstensor 4. Stufe  $R$  beschreiben. Der Schädigungstensor erfasst die Auswirkungen des Risses im lokalen Koordinatensystem des RVEs, während mit dem Rotationstensor die Transformation des Schädigungstensors ins globale Koordinatensystem der Struktur erfolgt. Die Orientierung des RVEs und damit auch die des Risses hängt vom Rissrichtungsvektor  $r$  ab, mit dem die für die Transformation erforderlichen Risswinkel  $\alpha_C$ ,  $\beta_C$  und  $\gamma_C$  zu ermitteln sind. In dieser Arbeit werden ausschließlich ein- und zweidimensionale Strukturen untersucht, so dass bereits mit dem Risswinkel  $\alpha_C$  die Orientierung des Risses festliegt.

Unter Druckbeanspruchung hingegen existiert eine Vielzahl von Rissen mit zum Teil unterschiedlicher Orientierung. Eine eindeutige Bestimmung der Rissrichtung ist somit nicht möglich. Deshalb erfolgt die Modellierung des Verformungsverhaltens unter Druckbeanspruchung mittels isotroper Schädigung, deren Auswirkungen auf die Materialeigenschaften die skalare Schädigungsvariable  $D$  beschreibt.

Der Schädigungseffektensor

$$\mathbf{M}(\tilde{\varepsilon}_{R,G}^{pl}, \varepsilon_{VD}^{pl}) = \left(1 - D(\varepsilon_{VD}^{pl})\right)^{-1} \left(\mathbf{I} - D_C(\kappa_C^m(\tilde{\varepsilon}_{R,G}^{pl}))\right)^{-1} : \mathbf{R}^{-1}(\alpha_C(\tilde{\varepsilon}_{R,G}^{pl})) \quad (6.7)$$

fasst isotrope und anisotrope Schädigung multiplikativ zusammen. Dabei hängt die Entwicklung der anisotropen Schädigung vom effektiven plastischen Verzerrungstensor  $\tilde{\varepsilon}_{R,G}^{pl}$  ab, der aus dem modifizierten Rankine-Kriterium folgt. Die isotrope Schädigungsentwicklung hingegen wird mit der aus dem Drucker-Prager-Kriterium resultierenden plastischen Vergleichsverzerrung  $\varepsilon_{VD}^{pl}$  bestimmt.

#### Zur Definition des Schädigungseffektensors

Schädigung tritt bei Beton stets zusammen mit irreversiblen Verformungen auf. Daher ist es bei Modellen auf Grundlage der Plastizitätstheorie nahe liegend, die Schädigungsentwicklung mit einer Variable zu beschreiben, die nur bei irreversiblen Verformungsprozessen Änderungen erfährt. Dieser Anforderung genügen die plastischen Verzerrungen, deren Rate bei assoziiertem Fließen definiert ist zu

$$\dot{\varepsilon}^{pl} = \dot{\varepsilon}_D^{pl} + \dot{\varepsilon}_R^{pl} = \frac{\partial F_D}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \dot{\lambda}_D + \frac{\partial F_R}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \dot{\lambda}_R = \mathbf{M}^T : \frac{\partial F_D}{\partial \tilde{\boldsymbol{\sigma}}} \dot{\lambda}_D + \mathbf{M}^T : \frac{\partial F_R}{\partial \tilde{\boldsymbol{\sigma}}} \dot{\lambda}_R. \quad (6.8)$$

Eine von den plastischen Verzerrungen abhängige Schädigungsentwicklung führt bei numerischer Simulation zu einem abrupten, nahezu vertikalen Abfall der Spannungen im Nachbruchbereich, weil der Schädigungseffektensor die plastischen Verzerrungen beeinflusst. Der abrupte Abfall der Spannungen widerspricht experimentellen Beobachtungen. Daher erfolgt die Beschreibung der anisotropen Schädigungsentwicklung hier mittels effektiver plastischer Verzerrungen, die vom Schädigungseffektensor unabhängig sind. Die effektiven plastischen Verzerrungen sind allerdings im lokalen Koordinatensystem des RVEs definiert, so dass diese für eine objektive Bestimmung der Rissrichtung ins globale Koordinatensystem der Struktur zu transformieren sind,

$$\dot{\tilde{\epsilon}}_{R,G}^{pl} = \mathbf{R}^{-T} : \dot{\tilde{\epsilon}}_R^{pl} = \mathbf{R}^{-T} : \mathbf{M}^{-T} : \dot{\epsilon}_R^{pl} = \mathbf{R}^{-T} : \frac{\partial F_R}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \dot{\lambda}_R . \quad (6.9)$$

Die isotrope Schädigungsentwicklung hingegen ist aufgrund der Identität der plastischen Vergleichsverzerrungsrate  $\dot{\epsilon}_{VD}^{pl}$  und des Lagrange'schen Multiplikators  $\dot{\lambda}_D$  vom Schädigungseffektensor unabhängig. Somit sind im Gegensatz zur anisotropen Schädigungsbeschreibung keine Modifikationen erforderlich.

## Anisotrope Schädigung

Aus der Eigenwertaufgabe

$$\left( d\tilde{\epsilon}_{R,G}^{pl} - \lambda_i \mathbf{I} \right) \cdot \boldsymbol{\phi}_i = \mathbf{0} \quad \text{für} \quad i = 1, 2, 3 \quad (6.10)$$

folgt mit der differentiellen Änderung des effektiven plastischen Verzerrungstensors  $d\tilde{\epsilon}_{R,G}^{pl} = \dot{\tilde{\epsilon}}_{R,G}^{pl} dt$  das Differential des Rissrichtungsvektors

$$d\mathbf{r} = \max(\lambda_i, 0) \boldsymbol{\phi}_i , \quad (6.11)$$

das dem Produkt aus größtem positiven Eigenwert und zugehörigem Eigenvektor  $\boldsymbol{\phi}_i$  entspricht. Sind sämtliche Eigenwerte  $\lambda_i$  negativ, dann ist das Differential des Rissrichtungsvektors dem Nullvektor identisch. Unter der Bedingung, dass die Länge des Rissrichtungsvektors  $|\mathbf{r}|$  stets zunimmt, gilt

$$\mathbf{r} = \begin{cases} \mathbf{r}_A + d\mathbf{r} & \text{für} \quad \frac{|\mathbf{r}_A + d\mathbf{r}|}{|\mathbf{r}_A - d\mathbf{r}|} \geq 1 \\ \mathbf{r}_A - d\mathbf{r} & \text{für} \quad \frac{|\mathbf{r}_A + d\mathbf{r}|}{|\mathbf{r}_A - d\mathbf{r}|} < 1 \end{cases} , \quad (6.12)$$

wobei der Index  $A$  den Rissrichtungsvektor im Ausgangszustand kennzeichnet. Bild 6.2 verdeutlicht die Auswirkungen einer differentiellen Änderung des Rissrichtungsvektors auf die Orientierung des Risses.

Mit dem Rissrichtungsvektor  $\mathbf{r} = r_i \mathbf{e}_i$ , der orthogonal auf der Rissfläche steht, und



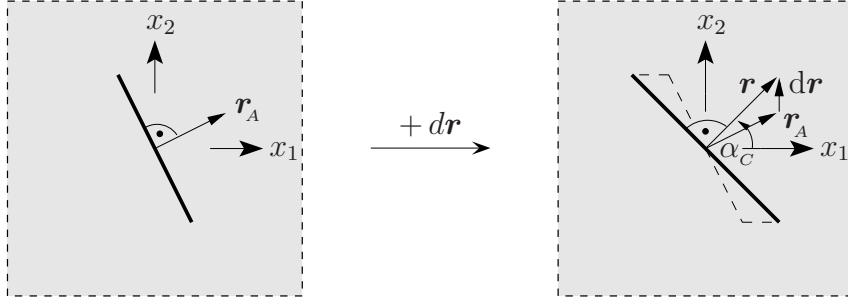


Bild 6.2: Differentielle Änderung der Rissrichtung

dem Basisvektor  $e_1 = [1 \ 0 \ 0]$  ist der Risswinkel

$$\alpha_C = \begin{cases} \arccos(e_1 \cdot \mathbf{r}/|\mathbf{r}|) & \text{für } r_2 \geq 0 \\ 2\pi - \arccos(e_1 \cdot \mathbf{r}/|\mathbf{r}|) & \text{für } r_2 < 0 \end{cases} \quad (6.13)$$

bestimmt, wobei erst die Einbeziehung der 2. Komponente von  $\mathbf{r}$  eine eindeutige Definition des Risswinkels ermöglicht. Mit dem Risswinkel und dem Rotationstensor 2. Stufe  $\mathbf{Q}$  (5.29) folgt unter Berücksichtigung von Gl. (5.21) der Rotationstensor 4. Stufe, der nachfolgend für den ebenen Verzerrungszustand in Matrixschreibweise angegeben ist,

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha_C & \sin^2 \alpha_C & 0 & -2 \sin \alpha_C \cos \alpha_C \\ \sin^2 \alpha_C & \cos^2 \alpha_C & 0 & 2 \sin \alpha_C \cos \alpha_C \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \sin \alpha_C \cos \alpha_C & -\sin \alpha_C \cos \alpha_C & 0 & \cos^2 \alpha_C - \sin^2 \alpha_C \end{bmatrix}. \quad (6.14)$$

Während der Rotationstensor  $\mathbf{R}$  die Orientierung des Risses im globalen Koordinatensystem der Struktur beschreibt, erfasst der Schädigungstensor  $\mathbf{D}_C$  den Einfluss des Risses auf die Materialeigenschaften im lokalen Koordinatensystem des RVEs. Die Rissentwicklung im RVE hängt von der modifizierten bezogenen Risslänge  $\kappa_C^m$  (5.76) ab, die mit dem größten positiven Eigenwert  $d\lambda^+$  des Differentials der effektiven plastischen Verzerrungen und dem Modellparameter  $a_C$  definiert ist zu

$$\kappa_C^m = a_C (\lambda_A^+ + d\lambda^+) \quad \text{mit} \quad d\lambda^+ = \max(\lambda_i, 0). \quad (6.15)$$

Bild 6.3 stellt die Auswirkungen anisotroper Schädigung auf die Fließfläche im Raum der nominalen Spannungen dar. Das Schließen von Rissen ist im entwickelten Modell nicht berücksichtigt, da dieses Phänomen nur bei zyklischer Beanspruchung von Bedeutung ist. Daher kann die Festigkeit des geschädigten Materials für bestimmte Spannungs kombinationen die Festigkeit des ungeschädigten Materials überschreiten. Die Überschreitung der Festigkeit ist zwar physikalisch unbegründet, beeinflusst bei monotoner Beanspruchung jedoch nicht die Berechnungsergebnisse.

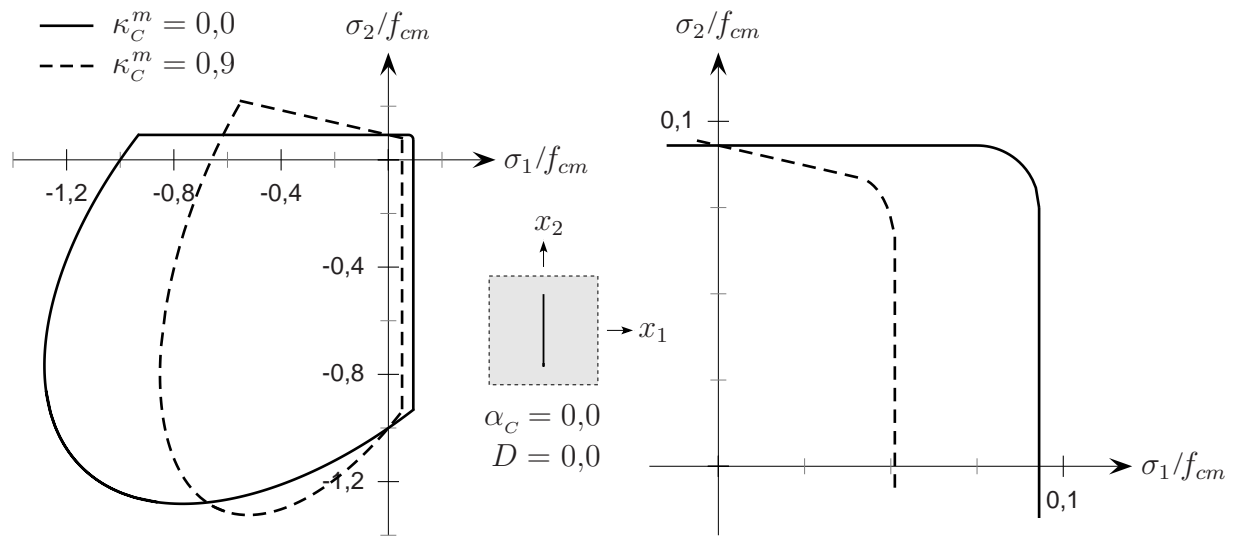


Bild 6.3: Auswirkungen anisotroper Schädigung auf die Fließfläche

## Isotrope Schädigung

Die Funktion

$$D = \begin{cases} k \left( \varepsilon_{VD}^{pl} \right)^z & \text{für } \varepsilon_{VD}^{pl} \leq 1/a_s \\ 1 - \exp(-a_s \varepsilon_{VD}^{pl} + a_{s0}) & \text{für } \varepsilon_{VD}^{pl} > 1/a_s \end{cases} \quad (6.16)$$

mit

$$k = \frac{1 - \exp(a_{s0} - 1)}{(1/a_s)^z}, \quad z = \frac{\exp(a_{s0} - 1)}{1 - \exp(a_{s0} - 1)}$$

beschreibt den Verlauf der isotropen Schädigung und ist von der plastischen Vergleichsverzerrung  $\varepsilon_{VD}^{pl}$  abhängig, deren Rate entsprechend der Arbeitsverfestigungshypothese (3.52) definiert ist zu  $\dot{\varepsilon}_{VD}^{pl} = \dot{\lambda}_D$ . Bild 6.4 stellt den Verlauf der isotropen Schädigung dar und verdeutlicht die Bedeutung der Modellparameter  $a_{s0}$  und  $a_s$ .

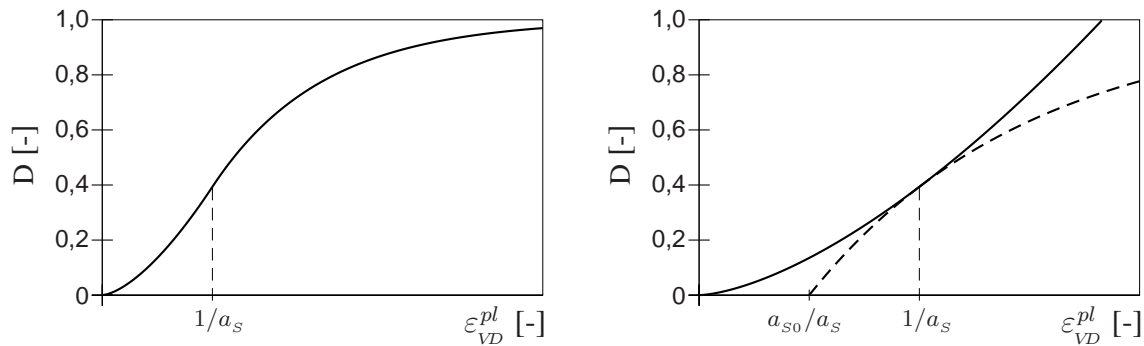


Bild 6.4: Verlauf der isotropen Schädigung

### 6.1.3 Materialgleichungen

Die Herleitung der Materialgleichungen zur Beschreibung von elastisch-plastischem Materialverhalten und Schädigung erfolgt mit Hilfe des Prinzips der maximalen Dissipation. Die damit verbundene energetische Betrachtung ermöglicht die Überprüfung der thermodynamischen Konsistenz des Modells und gestattet somit Aussagen über dessen physikalische Plausibilität.

Bei kleinen Deformationen folgen die elastischen Verzerrungen aus der Differenz der Gesamtverzerrungen und der plastischen Verzerrungen,

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{el} = \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^{pl} \quad \text{mit} \quad \boldsymbol{\varepsilon}^{pl} = \boldsymbol{\varepsilon}_D^{pl} + \boldsymbol{\varepsilon}_R^{pl} . \quad (6.17)$$

Der plastische Verzerrungstensor  $\boldsymbol{\varepsilon}^{pl}$  besteht entsprechend der Koiter'schen Fließregel (3.55) aus den beiden Anteilen  $\boldsymbol{\varepsilon}_D^{pl}$  und  $\boldsymbol{\varepsilon}_R^{pl}$ , die aus dem Drucker-Prager-Kriterium und dem modifiziertem Rankine-Kriterium resultieren. Die spezifische freie Energie setzt sich wie die Gesamtverzerrungen aus einem elastischen und inelastischen Anteil zusammen. So gilt unter Berücksichtigung des Elastizitätstensor  $\tilde{\mathbf{C}}_P = \tilde{\mathbf{F}}_P^{-1}$  (5.44)

$$\rho \Psi(\boldsymbol{\varepsilon}^{el}, \mathbf{M}^{-1}, \zeta_D, \zeta_R) = \underbrace{\frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^{el} : \mathbf{M}^{-1} : \tilde{\mathbf{C}}_P : \mathbf{M}^{-T} : \boldsymbol{\varepsilon}^{el}}_{\tilde{\mathbf{C}}} + \underbrace{\frac{1}{2} H_D \zeta_D^2 + \frac{1}{2} H_R \zeta_R^2}_{\rho \Psi^{pl}(\zeta_D, \zeta_R)} , \quad (6.18)$$

wobei die Inverse des Schädigungseffektensors  $\mathbf{M}$  quadratisch in den elastischen Anteil  $\Psi^{el}$  des Potentials eingeht, um der Integrabilitätsbedingung (3.36) zu genügen. Der inelastische Anteil  $\Psi^{pl}$  des Potentials beschreibt den energetischen Beitrag der isotropen Verfestigung zur spezifischen freien Energie und ist mit den Verfestigungsmoduln  $H_D$  und  $H_R$  sowie den inneren Zustandsvariablen  $\zeta_D$  und  $\zeta_R$  bestimmt. Die partielle Ableitung des Potentials nach den Zustandsvariablen ergibt die Zustandsgleichungen, mit denen die thermodynamisch konjugierten Variablen

$$\boldsymbol{\sigma} = \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^{el}} = \mathbf{M}^{-1} : \tilde{\mathbf{C}}_P : \mathbf{M}^{-T} : \boldsymbol{\varepsilon}^{el} = \tilde{\mathbf{C}} : \boldsymbol{\varepsilon}^{el} , \quad (6.19)$$

$$\mathbf{S} = \rho \frac{\partial \Psi}{\partial (\mathbf{M}^{-1})} = \boldsymbol{\varepsilon}^{el} \otimes \tilde{\mathbf{C}}_P : \mathbf{M}^{-T} : \boldsymbol{\varepsilon}^{el} , \quad (6.20)$$

$$\eta_D = \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \zeta_D} = H_D \zeta_D , \quad (6.21)$$

$$\eta_R = \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \zeta_R} = H_R \zeta_R \quad (6.22)$$

definiert sind. Wie aus Gl. (6.20) ersichtlich, ist die zur Inversen des Schädigungseffektensors thermodynamisch konjugierte Variable  $\mathbf{S}$  ein unsymmetrischer Tensor 4. Stufe. Für die Anwendung des Prinzips der maximalen Dissipation ist  $\mathbf{S}$  in den Fließbedin-

gungen zu berücksichtigen, soll diese jedoch nicht beeinflussen. Die Fließbedingungen

$$F_D^m(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{S}, \eta_D) = F_D(\boldsymbol{\sigma}, \eta_D) + \varphi_D^d(\mathbf{S}, \eta_D) = \sigma_{VD} - (1-D) \sigma_{FD} + \varphi_D^d, \quad (6.23)$$

$$F_R^m(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{S}, \eta_R) = F_R(\boldsymbol{\sigma}, \eta_R) + \varphi_R^d(\mathbf{S}, \eta_R) = \sigma_{VR} - (1-D) \sigma_{FR} + \varphi_R^d \quad (6.24)$$

mit

$$\varphi_D^d(\mathbf{S}, \eta_D) = (H_D \zeta_D - \eta_D) D + \left( \boldsymbol{\varepsilon}^{el} \otimes \widetilde{\mathbf{C}}_P : \mathbf{M}^{-T} : \boldsymbol{\varepsilon}^{el} - \mathbf{S} \right) :: \frac{\partial(\mathbf{M}^{-1})}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{VD}^{pl}},$$

$$\varphi_R^d(\mathbf{S}, \eta_R) = (H_R \zeta_R - \eta_R) D + \left( \boldsymbol{\varepsilon}^{el} \otimes \widetilde{\mathbf{C}}_P : \mathbf{M}^{-T} : \boldsymbol{\varepsilon}^{el} - \mathbf{S} \right) :: \frac{\partial(\mathbf{M}^{-1})}{\partial \widetilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{R,G}^{pl}} : \frac{\dot{\widetilde{\boldsymbol{\varepsilon}}}_{R,G}^{pl}}{\dot{\zeta}_R}$$

genügen diesen Anforderungen, wobei die Zustandsvariablen des Potentials  $\Psi$  lediglich Parameter sind [87, 88]. Die Fließspannung  $\sigma_{FD}$  ist mit dem Faktor  $1 - D$  abgemindert, weil sonst eine Anpassung der Modellparameter an experimentelle Versuche nicht gelingt. Ohne die Abminderung treten zudem für bestimmte Parameterkonstellationen Oszillationen bei Auswertung der Fließbedingung (6.23) auf. Um eine konsistente Beschreibung des Verformungsverhaltens zu gewährleisten, wird auch die Fließspannung  $\sigma_{FR}$  mit dem Faktor  $1 - D$  abgemindert.

Bei rein mechanischen Prozessen folgt die Dissipation

$$\Phi = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \rho \dot{\Psi} = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{pl} - \mathbf{S} :: \dot{\mathbf{M}}^{-1} - \eta_D \dot{\zeta}_D - \eta_R \dot{\zeta}_R \geq 0 \quad (6.25)$$

aus Ungl. (3.27). Das Prinzip der maximalen Dissipation fordert unter Einhaltung der Fließbedingungen (6.23) und (6.24) sowie der Be- und Entlastungsbedingungen

$$\dot{\lambda}_D \geq 0, \quad F_D^m \leq 0, \quad \dot{\lambda}_D F_D^m = 0, \quad \dot{\lambda}_R \geq 0, \quad F_R^m \leq 0, \quad \dot{\lambda}_R F_R^m = 0, \quad (6.26)$$

dass die Dissipation einen Extremwert annimmt. Mit den modifizierten Fließbedingungen als Nebenbedingungen, die mit Hilfe der Lagrange'schen Multiplikatoren  $\dot{\lambda}_D$  und  $\dot{\lambda}_R$  im Funktional  $L$  berücksichtigt sind, lautet die zu lösende Extremwertaufgabe

$$\begin{aligned} L &= L(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{S}, \eta_D, \eta_R, \dot{\lambda}_D, \dot{\lambda}_R) \\ &= -\Phi(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{S}, \eta_D, \eta_R) + \dot{\lambda}_D F_D^m(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{S}, \eta_D) + \dot{\lambda}_R F_R^m(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{S}, \eta_R) \\ &= -\boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{pl} + \mathbf{S} :: \dot{\mathbf{M}}^{-1} + \eta_D \dot{\zeta}_D + \eta_R \dot{\zeta}_R + \dot{\lambda}_D F_D^m + \dot{\lambda}_R F_R^m \rightarrow \text{stat.} \end{aligned} \quad (6.27)$$

Für die Extremwerte des Funktional gilt

$$\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{0} = -\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{pl} + \dot{\lambda}_D \frac{\partial F_D^m}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + \dot{\lambda}_R \frac{\partial F_R^m}{\partial \boldsymbol{\sigma}}, \quad (6.28)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{S}} = \mathbf{0} = \dot{\mathbf{M}}^{-1} + \dot{\lambda}_D \frac{\partial F_D^m}{\partial \mathbf{S}} + \dot{\lambda}_R \frac{\partial F_R^m}{\partial \mathbf{S}}, \quad (6.29)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \eta_D} = 0 = \dot{\zeta}_D + \dot{\lambda}_D \frac{\partial F_D^m}{\partial \eta_D}, \quad (6.30)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \eta_R} = 0 = \dot{\zeta}_R + \dot{\lambda}_R \frac{\partial F_R^m}{\partial \eta_R}. \quad (6.31)$$

Da hier sämtliche Evolutionsgleichungen aus den Fließbedingungen resultieren, sind diese den Dissipationspotentialen identisch. Mit den Evolutionsgleichungen (6.30) und (6.31) folgt unter Berücksichtigung der Fließspannungen (6.6)

$$\dot{\zeta}_D = \dot{\lambda}_D , \quad (6.32)$$

$$\dot{\zeta}_R = \dot{\lambda}_R . \quad (6.33)$$

Demnach entspricht die Rate der inneren Zustandsvariable  $\zeta_D$  bzw.  $\zeta_R$  dem Lagrange'schen Multiplikator  $\dot{\lambda}_D$  bzw.  $\dot{\lambda}_R$ . Für die Rate der Inversen des Schädigungseffektors hingegen gilt unter Berücksichtigung der Identität  $\dot{\varepsilon}_{VD}^{pl} = \dot{\lambda}_D$  sowie der Evolutionsgleichungen (6.29) und (6.33)

$$\dot{\mathbf{M}}^{-1} = \frac{\partial(\mathbf{M}^{-1})}{\partial \varepsilon_{VD}^{pl}} \dot{\varepsilon}_{VD}^{pl} + \frac{\partial(\mathbf{M}^{-1})}{\partial \tilde{\varepsilon}_{R,G}^{pl}} : \dot{\tilde{\varepsilon}}_{R,G}^{pl} . \quad (6.34)$$

## Überprüfung der thermodynamischen Konsistenz

Die Materialgleichungen, welche die Zustandsgleichungen (6.19) - (6.22), die Fließbedingungen (6.23) und (6.24) sowie die Evolutionsgleichungen (6.28) - (6.31) umfassen, genügen bei geeigneter Wahl der Modellparameter der Dissipationsungleichung (6.25) und sind demnach thermodynamisch konsistent. Die Darstellung des 1. Terms der Dissipationsungleichung kann alternativ mit Hilfe effektiver Spannungen und Verzerrungsraten erfolgen. So gilt unter Berücksichtigung von Gl. (6.28)

$$\boldsymbol{\sigma} : \dot{\varepsilon}^{pl} = \tilde{\boldsymbol{\sigma}} : \dot{\tilde{\varepsilon}}^{pl} = \tilde{\boldsymbol{\sigma}} : \left( \frac{\partial F_D}{\partial \tilde{\boldsymbol{\sigma}}} \dot{\lambda}_D + \frac{\partial F_R}{\partial \tilde{\boldsymbol{\sigma}}} \dot{\lambda}_R \right) \geq \sigma_{VD} \dot{\lambda}_D + \sigma_{VR} \dot{\lambda}_R , \quad (6.35)$$

wobei Ungleichheit nur für den Definitionsbereich  $\tilde{\sigma}_2 > f_R$  des modifizierten Rankine-Kriteriums besteht. Mit Ungl. (6.35) sowie Gl. (6.32) und (6.33) folgt die Dissipation zu

$$\Phi \geq (\sigma_{VD} - \eta_D) \dot{\lambda}_D + (\sigma_{VR} - \eta_R) \dot{\lambda}_R - \mathbf{S} :: \dot{\mathbf{M}}^{-1} \geq 0 . \quad (6.36)$$

Der 1. und 2. Term von Ungl. (6.36) sind für positive Anfangsfließspannungen  $\sigma_{FD_0}$  und  $\sigma_{FR_0}$  stets erfüllt, was unmittelbar aus den Fließbedingungen hervorgeht. Somit verbleibt die Dissipationsungleichung

$$- \mathbf{S} :: \dot{\mathbf{M}}^{-1} \geq 0 , \quad (6.37)$$

die erfüllt ist, wenn die schädigungsbeschreibenden Modellparameter  $a_C$ ,  $a_{s_0}$  und  $a_S$  größer gleich null sind.

## 6.2 Nichtlokales Modell

Kennzeichnend für den Versagensprozess von Beton ist die mit Rissbildung und -wachstum einhergehende Entfestigung des Materials. Die numerische Simulation entfeste-

genden Materialverhaltens führt bei lokalen Modellen zu diskretisierungsabhängigen Lösungen, so dass zur Regularisierung der Randwertaufgabe die Modellgleichungen zu erweitern sind. In dieser Arbeit erfolgt die Regularisierung entsprechend der impliziten Gradientenformulierung. Die hierfür erforderlichen Modifikationen des lokalen Modells betreffen lediglich die Materialgleichungen. Gleichgewichtsbedingung und kinematische Beziehung bleiben unverändert. Das daraus resultierende nichtlokale Modell wird nachfolgend erläutert.

Bei nichtlokalen Modellen beeinflussen Zustandsvariablen eines materiellen Punktes im Gegensatz zu lokalen Modellen nicht nur den Materialzustand des Punktes, sondern auch den der unmittelbaren Umgebung. Im entwickelten Modell wird die Wirkung der Schädigung als nichtlokal angesehen. Folglich hängt der Schädigungseffektensor

$$\mathbf{M}(\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{R,G}^{pl}, \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{VD}^{pl}) = \left(1 - D(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{VD}^{pl})\right)^{-1} \left(\mathbf{I} - \mathbf{D}_C(\kappa_C^m(\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{R,G}^{pl}))\right)^{-1} : \mathbf{R}^{-1}(\alpha_C(\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{R,G}^{pl})) \quad (6.38)$$

nicht mehr von dem lokalen effektiven plastischen Verzerrungstensor  $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{R,G}^{pl}$  und der lokalen plastischen Vergleichsverzerrung  $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{VD}^{pl}$ , sondern von den jeweiligen nichtlokalen Verzerrungen ab. Der nichtlokale effektive plastische Verzerrungstensor  $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{R,G}^{pl}$  ist entsprechend Gl. (4.37) definiert zu

$$\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{R,G}^{pl} = \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{R,G}^{pl} - l^2 \nabla^2 \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{R,G}^{pl} . \quad (6.39)$$

Analog erfolgt die Definition der nichtlokalen plastischen Vergleichsverzerrung  $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{VD}^{pl}$ ,

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{VD}^{pl} = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{VD}^{pl} - l^2 \nabla^2 \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{VD}^{pl} . \quad (6.40)$$

Mit der internen Länge  $l$  enthält das nichtlokale Modell einen zusätzlichen Modellparameter, der den Einflussbereich der Schädigung festlegt und damit einen Bezug zur Mikrostruktur herstellt. Gegenüber dem lokalen Modell sind somit zwei zusätzliche partielle Differentialgleichungen zu berücksichtigen.

Eine thermodynamisch konsistente Herleitung der Materialgleichungen gelingt für explizite und implizite Gradientenmodelle mit nichtlokaler Entfestigungsvariable [69, 89, 167]. Für Modelle mit nichtlokaler Schädigungsvariable hingegen ist eine entsprechende Herleitung dem Autor nicht bekannt. Somit ist der Nachweis der thermodynamischen Konsistenz des entwickelten Modells allgemeingültig nicht zu erbringen. Allerdings sind Aussagen zur physikalischen Plausibilität bei numerischer Simulation durch Auswertung der Dissipationsungleichung (6.25) in den Gauß-Punkten möglich.

### 6.3 Berücksichtigung von Porendruck

Das entwickelte Modell berücksichtigt neben äußeren Belastungen auch innere Beanspruchungen in Form von Porendruck, der z. B. bei Sulfattreiben infolge Ettringitwachstums entsteht. Hierzu sind die Materialgleichungen zu erweitern, die nun mit der

volumetrischen Verzerrung  $\varepsilon_{PV}$  der Pore und dem bezogenen Porendruck  $\sigma_P$  zusätzliche Variablen enthalten. Für die volumetrische Verzerrung der Pore gilt unter der Voraussetzung kleiner Deformationen

$$\varepsilon_{PV} = \varepsilon_{PV}^{el} + \varepsilon_{PV}^{pl} , \quad (6.41)$$

wobei die Rate der plastischen volumetrischen Verzerrung  $\dot{\varepsilon}_{PV}^{pl}$  der Pore entsprechend Gl. (6.28) definiert ist zu

$$\dot{\varepsilon}_{PV}^{pl} = \dot{\varepsilon}_{PV_D}^{pl} + \dot{\varepsilon}_{PV_R}^{pl} = \frac{\partial F_D}{\partial \sigma_P} \dot{\lambda}_D + \frac{\partial F_R}{\partial \sigma_P} \dot{\lambda}_R . \quad (6.42)$$

Die Rate der plastischen Verzerrungen des differentiellen Volumens bzw. materiellen Punktes hingegen resultiert wie bisher aus Gl. (6.28). Die Beschreibung des elastischen Verformungsverhaltens erfolgt bei vollständiger Kopplung von äußerer Belastung und Porendruck mit den Spannungs-Verzerrungs-Beziehungen

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{el} = \tilde{\mathbf{F}} : \boldsymbol{\sigma} + \tilde{\mathbf{F}}_K \sigma_P , \quad \varepsilon_{PV}^{el} = \tilde{\mathbf{F}}_K^T : \boldsymbol{\sigma} + \tilde{F}_I \sigma_P . \quad (6.43)$$

Diese enthalten neben  $\tilde{\mathbf{F}} = \mathbf{M}^T : \tilde{\mathbf{F}}_P : \mathbf{M}$  weitere Materialtensoren,

$$\tilde{\mathbf{F}}_K = \mathbf{M}_K^T \cdot \tilde{\mathbf{F}}_{KP} \cdot \mathbf{M}_K , \quad \tilde{F}_I = M_I \tilde{F}_{IP} M_I , \quad (6.44)$$

die mit Hilfe der Nachgiebigkeitstensoren  $\tilde{\mathbf{F}}_{KP}$  (5.45) und  $\tilde{F}_{IP}$  (5.46) des ungeschädigten Ausgangszustands sowie den Schädigungseffektntensoren

$$\mathbf{M}_K(\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{R,G}^{pl}, \bar{\varepsilon}_{VD}^{pl}) = \left(1 - D(\bar{\varepsilon}_{VD}^{pl})\right)^{-1} \left(\mathbf{I} - \mathbf{D}_{KC}(\kappa_C^m(\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{R,G}^{pl}))\right)^{-1} \cdot \mathbf{Q}^{-1}(\alpha_C(\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{R,G}^{pl})) , \quad (6.45)$$

$$M_I(\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{R,G}^{pl}, \bar{\varepsilon}_{VD}^{pl}) = \left(1 - D(\bar{\varepsilon}_{VD}^{pl})\right)^{-1} \left(1 - D_{IC}(\kappa_C^m(\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{R,G}^{pl}))\right)^{-1} \quad (6.46)$$

definiert sind. Dabei setzt sich der Schädigungseffektntensor  $\mathbf{M}_K$  entsprechend Gl. (6.7) multiplikativ aus der skalaren Schädigungsvariable  $D$ , dem im lokalen Koordinatensystem des RVEs definierten Schädigungstensor 2. Stufe  $\mathbf{D}_{KC}$  (5.67) und dem Rotationsensor 2. Stufe  $\mathbf{Q}$  (5.29) zusammen. Der Schädigungseffektntensor  $M_I$  hingegen ist koordinateninvariant und mit den skalaren Schädigungsvariablen  $D$  und  $D_{IC}$  bestimmt. Für die Rate der Schädigungseffektntensoren gilt

$$\dot{\mathbf{M}}_K^{-1} = \frac{\partial(\mathbf{M}_K^{-1})}{\partial \bar{\varepsilon}_{VD}^{pl}} \dot{\bar{\varepsilon}}_{VD}^{pl} + \frac{\partial(\mathbf{M}_K^{-1})}{\partial \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{R,G}^{pl}} : \dot{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}}_{R,G}^{pl} , \quad (6.47)$$

$$\dot{M}_I^{-1} = \frac{\partial(M_I^{-1})}{\partial \bar{\varepsilon}_{VD}^{pl}} \dot{\bar{\varepsilon}}_{VD}^{pl} + \frac{\partial(M_I^{-1})}{\partial \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{R,G}^{pl}} : \dot{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}}_{R,G}^{pl} . \quad (6.48)$$

Darüber hinaus ist der Porendruck in den Fließbedingungen zu berücksichtigen, da eine Schädigung des Materials auch ohne äußere Belastung möglich ist. Die Berücksichtigung des Porendrucks erfolgt über die effektiven Spannungen, wobei nachfolgend zwei



verschiedene Formulierungen vorgestellt werden. Bei der ersten Formulierung wird zunächst eine zum Porendruck verzerrungsäquivalente äußere Ersatzbelastung ermittelt. Nach Multiplikation der Ersatzbelastung mit dem Modellparameter  $a_p$  folgen dann die aus Porendruck resultierenden Spannungen zu

$$\sigma_p = a_p \tilde{\mathbf{F}}^{-1} : \left( \epsilon^{el} - \tilde{\mathbf{F}} : \sigma \right) = a_p \tilde{\mathbf{F}}^{-1} : \tilde{\mathbf{F}}_K \sigma_p . \quad (6.49)$$

Die Überlagerung von  $\sigma_p$  mit den Spannungen aus äußerer Belastung ergibt schließlich unter Berücksichtigung von Gl. (3.67) die effektiven Spannungen

$$\tilde{\sigma} = \mathbf{M} : \sigma + a_p \mathbf{M} : \tilde{\mathbf{F}}^{-1} : \tilde{\mathbf{F}}_K \sigma_p . \quad (6.50)$$

Diese Formulierung erlaubt eine sehr anschauliche Interpretation der effektiven Spannungen, da hier die Spannungen aus Porendruck über eine verzerrungsäquivalente äußere Ersatzbelastung ermittelt werden. In numerischer Hinsicht ist die Formulierung jedoch eher ungünstig, da der zweite Term in Gl. (6.50) für  $\kappa_c \rightarrow 1$  unbestimmt ist. Die Ursache hierfür liegt darin begründet, dass für  $\kappa_c \rightarrow 1$  Komponenten des Nachgiebigkeitstensors  $\tilde{\mathbf{F}}_K$  gegen unendlich und Komponenten der Inversen des Nachgiebigkeitstensors  $\tilde{\mathbf{F}}$  gegen null streben. Daher wird hier eine Formulierung gewählt, die strukturell der von Biot [13] entspricht. Biot berücksichtigt den Porendruck über modifizierte Spannungen in den Modellgleichungen, um das Verformungsverhalten wassergesättigter Böden zu beschreiben. Das Konzept von Biot wurde bereits von Gawin et al. [47] und Meschke & Grasberger [97] erfolgreich auf Beton angewendet, um Wechselwirkungen zwischen Transport- und Degradationsprozessen sowie dem Verformungsverhalten zu beschreiben. In dieser Arbeit sind die aus Porendruck resultierenden Spannungen abweichend von Biot definiert zu

$$\sigma_p = a_p \overset{2}{\mathbf{I}} \sigma_p . \quad (6.51)$$

Einziger Unterschied ist, dass hier statt dem Porendruck  $p$  der bezogene Porendruck  $\sigma_p = -\rho_p p$  als Variable verwendet wird. Demnach gilt für den Modellparameter  $a_p = a_B / \rho_p$ , wobei  $a_B$  der Biot-Koeffizient ist. Nach Addition der Spannungen aus Porendruck und äußerer Belastung sowie anschließender Multiplikation mit dem Schädigungseffektensor  $\mathbf{M}$  folgen die effektiven Spannungen zu

$$\tilde{\sigma} = \mathbf{M} : \sigma + a_p \mathbf{M} : \overset{2}{\mathbf{I}} \sigma_p . \quad (6.52)$$

## Zusammenfassung der Materialgleichungen

Abschließend folgt für das nichtlokale Modell eine Zusammenfassung der Materialgleichungen. Diese umfassen bei vollständiger Kopplung von äußerer Belastung und Porendruck

- die Spannungs-Verzerrungs-Beziehungen

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \tilde{\mathbf{F}} : \boldsymbol{\sigma} + \tilde{\mathbf{F}}_K \sigma_P + \boldsymbol{\varepsilon}^{pl} , \quad (6.53)$$

$$\varepsilon_{PV} = \tilde{\mathbf{F}}_K^T : \boldsymbol{\sigma} + \tilde{F}_I \sigma_P + \varepsilon_{PV}^{pl} , \quad (6.54)$$

- die Fließbedingungen

$$F_D = \sigma_{VD}(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}) - (1 - D) (\sigma_{FD_0} + H_D \lambda_D) \leq 0 , \quad (6.55)$$

$$F_R = \sigma_{VR}(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}) - (1 - D) (\sigma_{FR_0} + H_R \lambda_R) \leq 0 \quad (6.56)$$

- und die Evolutionsgleichungen

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{pl} = \frac{\partial F_D}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \dot{\lambda}_D + \frac{\partial F_R}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \dot{\lambda}_R , \quad (6.57)$$

$$\dot{\varepsilon}_{PV}^{pl} = \frac{\partial F_D}{\partial \sigma_P} \dot{\lambda}_D + \frac{\partial F_R}{\partial \sigma_P} \dot{\lambda}_R , \quad (6.58)$$

$$\dot{\mathbf{M}}^{-1} = \frac{\partial(\mathbf{M}^{-1})}{\partial \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{VD}^{pl}} \dot{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}}_{VD}^{pl} + \frac{\partial(\mathbf{M}^{-1})}{\partial \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{R,G}^{pl}} : \dot{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}}_{R,G}^{pl} , \quad (6.59)$$

$$\dot{\mathbf{M}}_K^{-1} = \frac{\partial(\mathbf{M}_K^{-1})}{\partial \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{VD}^{pl}} \dot{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}}_{VD}^{pl} + \frac{\partial(\mathbf{M}_K^{-1})}{\partial \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{R,G}^{pl}} : \dot{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}}_{R,G}^{pl} , \quad (6.60)$$

$$\dot{M}_I^{-1} = \frac{\partial(M_I^{-1})}{\partial \bar{\varepsilon}_{VD}^{pl}} \dot{\bar{\varepsilon}}_{VD}^{pl} + \frac{\partial(M_I^{-1})}{\partial \bar{\varepsilon}_{R,G}^{pl}} : \dot{\bar{\varepsilon}}_{R,G}^{pl} . \quad (6.61)$$

Gegenüber dem lokalen Modell ist zur Bestimmung der Schädigungseffektntensoren

$$\mathbf{M} = \left(1 - D(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{VD}^{pl})\right)^{-1} \left(\mathbf{I} - \mathbf{D}_C(\kappa_C^m(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{R,G}^{pl}))\right)^{-1} : \mathbf{R}^{-1}(\alpha_C(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{R,G}^{pl})) , \quad (6.62)$$

$$\mathbf{M}_K = \left(1 - D(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{VD}^{pl})\right)^{-1} \left(\mathbf{I} - \mathbf{D}_{KC}(\kappa_C^m(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{R,G}^{pl}))\right)^{-1} \cdot \mathbf{Q}^{-1}(\alpha_C(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{R,G}^{pl})) , \quad (6.63)$$

$$M_I = \left(1 - D(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{VD}^{pl})\right)^{-1} \left(1 - D_{IC}(\kappa_C^m(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{R,G}^{pl}))\right)^{-1} , \quad (6.64)$$

die Eigenwertaufgabe (6.10) mit dem Differential der nichtlokalen effektiven plastischen Verzerrungen  $d\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{R,G}^{pl} = \dot{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}}_{R,G}^{pl} dt$  auszuwerten. Mit den daraus resultierenden Eigenwerten und -vektoren sind dann der Risswinkel  $\alpha_C$  (6.13) und die modifizierte bezogene Risslänge  $\kappa_C^m$  (6.15) zu ermitteln. Die skalare Schädigungsvariable  $D$  (6.16) hingegen ist mit der nichtlokalen plastischen Vergleichsverzerrung  $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{VD}^{pl}$  zu bestimmen. Ferner sind gegenüber einer lokalen Formulierung die nichtlokalen Verzerrungsbilanzen (6.39) und (6.40) als weitere Modellgleichungen zu berücksichtigen.



## 7 Numerische Formulierung

In mathematischer Hinsicht umfassen die Modellgleichungen sowohl algebraische als auch Differentialgleichungen. Analytische Lösungen für die daraus resultierende Randwertaufgabe existieren nur in Sonderfällen. Daher ist im Allgemeinen der Einsatz numerischer Verfahren erforderlich, welche die Lösung der Randwertaufgabe auf die Lösung eines Systems algebraischer Gleichungen zurückführen. Zu den numerischen Verfahren gehören die Finite-Element-Methode, die Rand-Element-Methode und das Differenzenverfahren, wobei erstgenanntes aufgrund seiner vielfältigen Einsatzmöglichkeiten zu den universellsten Verfahren zählt und in dieser Arbeit in Form einer Weggrößenformulierung Anwendung findet. Die Finite-Element-Methode [2, 6, 161, 165] benötigt die Modellgleichungen in schwacher Form, deren Herleitung mit Hilfe der Methode der gewichteten Residuen erfolgt. Aus der Diskretisierung der schwachen Form resultiert ein algebraisches Gleichungssystem, das hier aufgrund der Nichtlinearität der Materialgleichungen inkrementell iterativ zu lösen ist.

### 7.1 Materialgleichungen in Ratenform

Bei einer Weggrößenformulierung werden die Lagrange'schen Multiplikatoren meist in den Spannungs-Verzerrungs-Beziehungen abgelöst, um auf Systemebene die Anzahl der Unbekannten zu verringern. Die Herleitung der hierfür benötigten funktionalen Zusammenhänge erfolgt ausgehend von der Ratenform der Materialgleichungen. So folgen aus den Konsistenzbedingungen  $\dot{F}_D = 0$  und  $\dot{F}_R = 0$  die Lagrange'schen Multiplikatoren

$$\dot{\lambda}_D = - \left( \frac{\partial F_D}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial F_D}{\partial \sigma_P} \dot{\sigma}_P + \frac{\partial F_D}{\partial \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{R,G}^{pl}} : \dot{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}}_{R,G}^{pl} + \frac{\partial F_D}{\partial \tilde{\varepsilon}_{VD}^{pl}} \dot{\tilde{\varepsilon}}_{VD}^{pl} \right) / \frac{\partial F_D}{\partial \lambda_D}, \quad (7.1)$$

$$\dot{\lambda}_R = - \left( \frac{\partial F_R}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial F_R}{\partial \sigma_P} \dot{\sigma}_P + \frac{\partial F_R}{\partial \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{R,G}^{pl}} : \dot{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}}_{R,G}^{pl} + \frac{\partial F_R}{\partial \tilde{\varepsilon}_{VD}^{pl}} \dot{\tilde{\varepsilon}}_{VD}^{pl} \right) / \frac{\partial F_R}{\partial \lambda_R}. \quad (7.2)$$

Einsetzen von  $\dot{\lambda}_D$  und  $\dot{\lambda}_R$  in die Ratenform der Spannungs-Verzerrungs-Beziehungen

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^{el}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^{el}}{\partial \sigma_P} \dot{\sigma}_P + \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^{el}}{\partial \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{R,G}^{pl}} : \dot{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}}_{R,G}^{pl} + \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^{el}}{\partial \tilde{\varepsilon}_{VD}^{pl}} \dot{\tilde{\varepsilon}}_{VD}^{pl} + \frac{\partial F_D}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \dot{\lambda}_D + \frac{\partial F_R}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \dot{\lambda}_R, \quad (7.3)$$

$$\dot{\varepsilon}_{PV} = \frac{\partial \varepsilon_{PV}^{el}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial \varepsilon_{PV}^{el}}{\partial \sigma_P} \dot{\sigma}_P + \frac{\partial \varepsilon_{PV}^{el}}{\partial \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{R,G}^{pl}} : \dot{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}}_{R,G}^{pl} + \frac{\partial \varepsilon_{PV}^{el}}{\partial \tilde{\varepsilon}_{VD}^{pl}} \dot{\tilde{\varepsilon}}_{VD}^{pl} + \frac{\partial F_D}{\partial \sigma_P} \dot{\lambda}_D + \frac{\partial F_R}{\partial \sigma_P} \dot{\lambda}_R \quad (7.4)$$

ergibt

$$\dot{\epsilon} = \mathbf{A}_{11} : \dot{\sigma} + \mathbf{A}_{12} \dot{\sigma}_P + \mathbf{A}_{13} : \dot{\tilde{\epsilon}}_{R,G}^{pl} + \mathbf{A}_{14} \dot{\tilde{\epsilon}}_{VD}^{pl}, \quad (7.5)$$

$$\dot{\epsilon}_{PV} = \mathbf{A}_{21} : \dot{\sigma} + \mathbf{A}_{22} \dot{\sigma}_P + \mathbf{A}_{23} : \dot{\tilde{\epsilon}}_{R,G}^{pl} + \mathbf{A}_{24} \dot{\tilde{\epsilon}}_{VD}^{pl} \quad (7.6)$$

mit

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{11} &= \frac{\partial \epsilon^{el}}{\partial \sigma} - \frac{\frac{\partial F_R}{\partial \sigma} \otimes \frac{\partial F_R}{\partial \sigma}}{\frac{\partial F_R}{\partial \lambda_R}} - \frac{\frac{\partial F_D}{\partial \sigma} \otimes \frac{\partial F_D}{\partial \sigma}}{\frac{\partial F_D}{\partial \lambda_D}}, & \mathbf{A}_{12} &= \frac{\partial \epsilon^{el}}{\partial \sigma_P} - \frac{\frac{\partial F_R}{\partial \sigma} \frac{\partial F_R}{\partial \sigma_P}}{\frac{\partial F_R}{\partial \lambda_R}} - \frac{\frac{\partial F_D}{\partial \sigma} \frac{\partial F_D}{\partial \sigma_P}}{\frac{\partial F_D}{\partial \lambda_D}}, \\ \mathbf{A}_{13} &= \frac{\partial \epsilon^{el}}{\partial \tilde{\epsilon}_{R,G}^{pl}} - \frac{\frac{\partial F_R}{\partial \sigma} \otimes \frac{\partial F_R}{\partial \tilde{\epsilon}_{R,G}^{pl}}}{\frac{\partial F_R}{\partial \lambda_R}} - \frac{\frac{\partial F_D}{\partial \sigma} \otimes \frac{\partial F_D}{\partial \tilde{\epsilon}_{R,G}^{pl}}}{\frac{\partial F_D}{\partial \lambda_D}}, & \mathbf{A}_{14} &= \frac{\partial \epsilon^{el}}{\partial \tilde{\epsilon}_{VD}^{pl}} - \frac{\frac{\partial F_R}{\partial \sigma} \frac{\partial F_R}{\partial \tilde{\epsilon}_{VD}^{pl}}}{\frac{\partial F_R}{\partial \lambda_R}} - \frac{\frac{\partial F_D}{\partial \sigma} \frac{\partial F_D}{\partial \tilde{\epsilon}_{VD}^{pl}}}{\frac{\partial F_D}{\partial \lambda_D}}, \\ \mathbf{A}_{21} &= \frac{\partial \epsilon_{PV}^{el}}{\partial \sigma} - \frac{\frac{\partial F_R}{\partial \sigma_P} \frac{\partial F_R}{\partial \sigma}}{\frac{\partial F_R}{\partial \lambda_R}} - \frac{\frac{\partial F_D}{\partial \sigma_P} \frac{\partial F_D}{\partial \sigma}}{\frac{\partial F_D}{\partial \lambda_D}}, & \mathbf{A}_{22} &= \frac{\partial \epsilon_{PV}^{el}}{\partial \sigma_P} - \frac{\frac{\partial F_R}{\partial \sigma_P} \frac{\partial F_R}{\partial \sigma_P}}{\frac{\partial F_R}{\partial \lambda_R}} - \frac{\frac{\partial F_D}{\partial \sigma_P} \frac{\partial F_D}{\partial \sigma_P}}{\frac{\partial F_D}{\partial \lambda_D}}, \\ \mathbf{A}_{23} &= \frac{\partial \epsilon_{PV}^{el}}{\partial \tilde{\epsilon}_{R,G}^{pl}} - \frac{\frac{\partial F_R}{\partial \sigma_P} \frac{\partial F_R}{\partial \tilde{\epsilon}_{R,G}^{pl}}}{\frac{\partial F_R}{\partial \lambda_R}} - \frac{\frac{\partial F_D}{\partial \sigma_P} \frac{\partial F_D}{\partial \tilde{\epsilon}_{R,G}^{pl}}}{\frac{\partial F_D}{\partial \lambda_D}}, & \mathbf{A}_{24} &= \frac{\partial \epsilon_{PV}^{el}}{\partial \tilde{\epsilon}_{VD}^{pl}} - \frac{\frac{\partial F_R}{\partial \sigma_P} \frac{\partial F_R}{\partial \tilde{\epsilon}_{VD}^{pl}}}{\frac{\partial F_R}{\partial \lambda_R}} - \frac{\frac{\partial F_D}{\partial \sigma_P} \frac{\partial F_D}{\partial \tilde{\epsilon}_{VD}^{pl}}}{\frac{\partial F_D}{\partial \lambda_D}}. \end{aligned}$$

Ablösen von  $\dot{\sigma}_P$  in Gl. (7.5) führt schließlich auf den gesuchten funktionalen Zusammenhang zwischen Spannungsraten und Verzerrungsraten,

$$\dot{\sigma}(\dot{\epsilon}, \dot{\tilde{\epsilon}}_{R,G}^{pl}, \dot{\tilde{\epsilon}}_{VD}^{pl}, \dot{\epsilon}_{PV}) = \mathbf{C}_{uu}^{tan} : \dot{\epsilon} + \mathbf{C}_{u\tilde{\epsilon}}^{tan} : \dot{\tilde{\epsilon}}_{R,G}^{pl} + \mathbf{C}_{u\tilde{\lambda}}^{tan} \dot{\tilde{\epsilon}}_{VD}^{pl} + \mathbf{C}_{up}^{tan} \dot{\epsilon}_{PV} \quad (7.7)$$

mit

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{uu}^{tan} &= \left( \mathbf{A}_{11} - \frac{\mathbf{A}_{12} \otimes \mathbf{A}_{21}}{A_{22}} \right)^{-1}, & \mathbf{C}_{u\tilde{\epsilon}}^{tan} &= -\mathbf{C}_{uu}^{tan} : \left( \mathbf{A}_{13} - \frac{\mathbf{A}_{12} \otimes \mathbf{A}_{23}}{A_{22}} \right), \\ \mathbf{C}_{u\tilde{\lambda}}^{tan} &= -\mathbf{C}_{uu}^{tan} : \left( \mathbf{A}_{14} - \frac{\mathbf{A}_{12} \otimes \mathbf{A}_{24}}{A_{22}} \right), & \mathbf{C}_{up}^{tan} &= -\frac{\mathbf{C}_{uu}^{tan} : \mathbf{A}_{12}}{A_{22}}. \end{aligned}$$

Darüber hinaus ist für die numerische Formulierung die Rate des effektiven plastischen Verzerrungstensors  $\dot{\tilde{\epsilon}}_{R,G}^{pl}$  in Abhängigkeit von den Verzerrungsraten  $\dot{\epsilon}$ ,  $\dot{\tilde{\epsilon}}_{R,G}^{pl}$ ,  $\dot{\tilde{\epsilon}}_{VD}^{pl}$  und  $\dot{\epsilon}_{PV}$  anzugeben. So folgt mit Gl. (6.9) und (6.57) nach Ablösen von  $\dot{\lambda}_R$  sowie anschließender Substitution von  $\dot{\sigma}$  und  $\dot{\sigma}_P$

$$\dot{\tilde{\epsilon}}_{R,G}^{pl}(\dot{\epsilon}, \dot{\tilde{\epsilon}}_{R,G}^{pl}, \dot{\tilde{\epsilon}}_{VD}^{pl}, \dot{\epsilon}_{PV}) = \mathbf{C}_{\tilde{\epsilon}u}^{tan} : \dot{\epsilon} + \mathbf{C}_{\tilde{\epsilon}\tilde{\epsilon}}^{tan} : \dot{\tilde{\epsilon}}_{R,G}^{pl} + \mathbf{C}_{\tilde{\epsilon}\tilde{\lambda}}^{tan} \dot{\tilde{\epsilon}}_{VD}^{pl} + \mathbf{C}_{\tilde{\epsilon}p}^{tan} \dot{\epsilon}_{PV} \quad (7.8)$$

mit

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{\tilde{\epsilon}u}^{tan} &= -\mathbf{R}^{-T} : \mathbf{M}^{-T} : \frac{\partial F_R}{\partial \sigma} \otimes \left( \frac{\partial F_R}{\partial \sigma} - \frac{\partial F_R}{\partial \sigma_P} \frac{\mathbf{A}_{21}}{A_{22}} \right) : \mathbf{C}_{uu}^{tan} / \frac{\partial F_R}{\partial \lambda_R}, \\ \mathbf{C}_{\tilde{\epsilon}\tilde{\epsilon}}^{tan} &= -\mathbf{R}^{-T} : \mathbf{M}^{-T} : \frac{\partial F_R}{\partial \sigma} \otimes \left( \frac{\partial F_R}{\partial \tilde{\epsilon}_{R,G}^{pl}} - \frac{\partial F_R}{\partial \sigma_P} \frac{\mathbf{A}_{23}}{A_{22}} + \left( \frac{\partial F_R}{\partial \sigma} - \frac{\partial F_R}{\partial \sigma_P} \frac{\mathbf{A}_{21}}{A_{22}} \right) : \mathbf{C}_{u\tilde{\epsilon}}^{tan} \right) / \frac{\partial F_R}{\partial \lambda_R}, \\ \mathbf{C}_{\tilde{\epsilon}\tilde{\lambda}}^{tan} &= -\mathbf{R}^{-T} : \mathbf{M}^{-T} : \frac{\partial F_R}{\partial \sigma} \left( \frac{\partial F_R}{\partial \tilde{\epsilon}_{VD}^{pl}} - \frac{\partial F_R}{\partial \sigma_P} \frac{\mathbf{A}_{24}}{A_{22}} + \left( \frac{\partial F_R}{\partial \sigma} - \frac{\partial F_R}{\partial \sigma_P} \frac{\mathbf{A}_{21}}{A_{22}} \right) : \mathbf{C}_{u\tilde{\lambda}}^{tan} \right) / \frac{\partial F_R}{\partial \lambda_R}, \end{aligned}$$

$$\mathbf{C}_{\bar{\varepsilon}p}^{tan} = -\mathbf{R}^{-T} : \mathbf{M}^{-T} : \frac{\partial F_R}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \left( \frac{\partial F_R}{\partial \sigma_P} \frac{1}{A_{22}} + \left( \frac{\partial F_R}{\partial \boldsymbol{\sigma}} - \frac{\partial F_R}{\partial \sigma_P} \frac{\mathbf{A}_{21}}{A_{22}} \right) : \mathbf{C}_{up}^{tan} \right) / \frac{\partial F_R}{\partial \lambda_R}.$$

Für die plastische Vergleichsverzerrungsrate, die dem Lagrange'schen Multiplikator  $\dot{\lambda}_D$  identisch ist, lautet der entsprechende funktionale Zusammenhang

$$\dot{\varepsilon}_{VD}^{pl}(\dot{\varepsilon}, \dot{\tilde{\varepsilon}}_{R,G}^{pl}, \dot{\varepsilon}_{VD}^{pl}, \dot{\varepsilon}_{PV}) = \mathbf{C}_{\lambda u}^{tan} : \dot{\varepsilon} + \mathbf{C}_{\lambda \bar{\varepsilon}}^{tan} : \dot{\tilde{\varepsilon}}_{R,G}^{pl} + C_{\lambda \lambda}^{tan} \dot{\varepsilon}_{VD}^{pl} + C_{\lambda p}^{tan} \dot{\varepsilon}_{PV} \quad (7.9)$$

mit

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{\lambda u}^{tan} &= - \left( \frac{\partial F_D}{\partial \boldsymbol{\sigma}} - \frac{\partial F_D}{\partial \sigma_P} \frac{\mathbf{A}_{21}}{A_{22}} \right) : \mathbf{C}_{uu}^{tan} / \frac{\partial F_D}{\partial \lambda_D}, \\ \mathbf{C}_{\lambda \bar{\varepsilon}}^{tan} &= - \left( \frac{\partial F_D}{\partial \tilde{\varepsilon}_{R,G}^{pl}} - \frac{\partial F_D}{\partial \sigma_P} \frac{\mathbf{A}_{23}}{A_{22}} + \left( \frac{\partial F_D}{\partial \boldsymbol{\sigma}} - \frac{\partial F_D}{\partial \sigma_P} \frac{\mathbf{A}_{21}}{A_{22}} \right) : \mathbf{C}_{u\bar{\varepsilon}}^{tan} \right) / \frac{\partial F_D}{\partial \lambda_D}, \\ \mathbf{C}_{\lambda \lambda}^{tan} &= - \left( \frac{\partial F_D}{\partial \tilde{\varepsilon}_{VD}^{pl}} - \frac{\partial F_D}{\partial \sigma_P} \frac{A_{24}}{A_{22}} + \left( \frac{\partial F_D}{\partial \boldsymbol{\sigma}} - \frac{\partial F_D}{\partial \sigma_P} \frac{\mathbf{A}_{21}}{A_{22}} \right) : \mathbf{C}_{u\lambda}^{tan} \right) / \frac{\partial F_D}{\partial \lambda_D}, \\ \mathbf{C}_{\lambda p}^{tan} &= - \left( \frac{\partial F_D}{\partial \sigma_P} \frac{1}{A_{22}} + \left( \frac{\partial F_D}{\partial \boldsymbol{\sigma}} - \frac{\partial F_D}{\partial \sigma_P} \frac{\mathbf{A}_{21}}{A_{22}} \right) : \mathbf{C}_{up}^{tan} \right) / \frac{\partial F_D}{\partial \lambda_D}. \end{aligned}$$

Die Materialtensoren  $\mathbf{C}_{(\cdot\cdot)}^{tan}$  repräsentieren die Eigenschaften des Materials bei einer infinitesimalen Änderung des Gleichgewichtszustands. Tritt keine innere Beanspruchung und damit auch kein Porendruck auf, sind die Spannungs-Verzerrungs-Beziehungen (7.3) und (7.4) entkoppelt, so dass sich die Bestimmungsgleichungen für die Materialtensoren erheblich vereinfachen.

## 7.2 Integration der Materialgleichungen

Für die numerische Formulierung werden die nichtlinearen Materialgleichungen (7.7) - (7.9) in inkrementeller Form benötigt. Hierzu sind die Materialgleichungen numerisch zu integrieren, wofür verschiedene Verfahren wie die verallgemeinerte Mittelpunktsregel oder die verallgemeinerte Trapezregel zur Verfügung stehen. Exemplarisch wird die numerische Integration anhand der Evolutionsgleichung für die plastischen Verzerrungsraten  $\dot{\varepsilon}_R^{pl}$  erläutert. Da im entwickelten Modell das Materialverhalten von der Belastungsgeschwindigkeit unabhängig ist, gilt  $d(\cdot) = (\cdot) dt$ . Somit folgt nach Anwenden der verallgemeinerten Trapezregel das Inkrement der plastischen Verzerrungen zu

$$\Delta \varepsilon_R^{pl} = \int_{\lambda_R^t}^{\lambda_R^{t+1}} \frac{\partial F_R}{\partial \boldsymbol{\sigma}} d\lambda_R \approx (1 - \vartheta) \frac{\partial F_R}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \Big|_t \Delta \lambda_R + \vartheta \frac{\partial F_R}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \Big|_{t+1} \Delta \lambda_R = \frac{\partial F_R}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \Big|_{t+\vartheta} \Delta \lambda_R, \quad (7.10)$$

das einer linearen Interpolation zwischen den Inkrementen benachbarter Gleichgewichtszustände entspricht. Die Auswertung des Integranden zum Zeitpunkt  $t$  ergibt das explizite Euler-Verfahren ( $\vartheta = 0$ ), während die Auswertung zum Zeitpunkt  $t+1$  auf

das implizite Euler-Verfahren ( $\vartheta = 1$ ) führt. Das implizite Euler-Verfahren ist unbedingt stabil, das explizite hingegen nur bedingt.

Deshalb erfolgt die Integration der Materialgleichungen mit Hilfe des impliziten Euler-Verfahrens. Die inkrementelle Form der Materialgleichungen lautet somit

$$\Delta \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}_{uu}^{tan} \Big|_{t+1} : \Delta \boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{C}_{u\bar{\varepsilon}}^{tan} \Big|_{t+1} : \Delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{R,G}^{pl} + \mathbf{C}_{u\bar{\lambda}}^{tan} \Big|_{t+1} \Delta \bar{\varepsilon}_{VD}^{pl} + \mathbf{C}_{up}^{tan} \Big|_{t+1} \Delta \varepsilon_{PV} , \quad (7.11)$$

$$\Delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{R,G}^{pl} = \mathbf{C}_{\bar{\varepsilon}u}^{tan} \Big|_{t+1} : \Delta \boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{C}_{\bar{\varepsilon}\bar{\varepsilon}}^{tan} \Big|_{t+1} : \Delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{R,G}^{pl} + \mathbf{C}_{\bar{\varepsilon}\bar{\lambda}}^{tan} \Big|_{t+1} \Delta \bar{\varepsilon}_{VD}^{pl} + \mathbf{C}_{\bar{\varepsilon}p}^{tan} \Big|_{t+1} \Delta \varepsilon_{PV} , \quad (7.12)$$

$$\Delta \varepsilon_{VD}^{pl} = \mathbf{C}_{\lambda u}^{tan} \Big|_{t+1} : \Delta \boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{C}_{\lambda\bar{\varepsilon}}^{tan} \Big|_{t+1} : \Delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{R,G}^{pl} + \mathbf{C}_{\lambda\bar{\lambda}}^{tan} \Big|_{t+1} \Delta \bar{\varepsilon}_{VD}^{pl} + \mathbf{C}_{\lambda p}^{tan} \Big|_{t+1} \Delta \varepsilon_{PV} . \quad (7.13)$$

### 7.3 Schwache Form der Randwertaufgabe

Die kinematische Beziehung und die Materialgleichungen sind bei einer Weggrößenformulierung implizit berücksichtigt. Daher sind zur Lösung der Randwertaufgabe lediglich die schwache Form der Gleichgewichtsbedingung und die schwache Form der nichtlokalen Verzerrungsbilanzen zu diskretisieren.

#### Schwache Form der Gleichgewichtsbedingung

Die starke Form der Gleichgewichtsbedingung resultiert aus der Impulsbilanz und ist für beliebige materielle Punkte  $\mathbf{x}$  eines Gebiets  $\Omega$  zu erfüllen. Auf dem Rand  $\partial\Omega$  des Gebiets sind entweder Dirichlet-Randbedingungen  $\hat{\mathbf{u}}$  oder Neumann-Randbedingungen  $\hat{\mathbf{t}}$  vorzugeben, so dass entweder die Verschiebungen

$$\mathbf{u} = \hat{\mathbf{u}} \quad (7.14)$$

oder die Spannungen

$$\mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \hat{\mathbf{t}} \quad (7.15)$$

auf dem Rand bekannt sind. Zur Lösung der Randwertaufgabe ist die starke Form der Gleichgewichtsbedingung zunächst in eine schwache Form zu überführen. Diese folgt nach Wichtung der Gleichgewichtsbedingung (3.12) und der Neumann-Randbedingungen (7.15) mit der Testfunktion  $\delta \mathbf{u}$  sowie anschließender Integration über das Gebiet  $\Omega$  bzw. dessen Rand  $\partial\Omega$  zu

$$\int_{\Omega} \delta \mathbf{u} \cdot (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{b}) \, d\Omega + \int_{\partial\Omega} \delta \mathbf{u} \cdot (\hat{\mathbf{t}} - \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) \, d(\partial\Omega) = 0 , \quad (7.16)$$



wobei die Testfunktion den Dirichlet-Randbedingungen (7.14) genügen soll. Eine physikalische Interpretation von Gl. (7.16) gelingt, wenn die Testfunktion als virtuelle Verschiebung aufgefasst wird. So folgt nach partieller Integration des 1. Terms von Gl. (7.16) unter Berücksichtigung des Gauß'schen Integralsatzes und der kinematischen Beziehung (3.5) die Arbeitsgleichung

$$\underbrace{- \int_{\Omega} \delta \boldsymbol{\varepsilon} : \boldsymbol{\sigma} \, d\Omega}_{\delta A_{int}^u} + \underbrace{\int_{\Omega} \rho \, \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{b} \, d\Omega + \int_{\partial\Omega} \delta \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{t}} \, d(\partial\Omega)}_{\delta A_{ext}^u} = 0 . \quad (7.17)$$

Diese Darstellung entspricht dem Prinzip der virtuellen Verschiebungen, welches das Gleichgewicht über die Bilanz virtueller Arbeiten definiert. Der 1. Term der Arbeitsgleichung beschreibt die von den virtuellen Verzerrungen auf den realen Spannungen geleistete virtuelle innere Arbeit  $\delta A_{int}^u$ , während der 2. und 3. Term die virtuelle äußere Arbeit  $\delta A_{ext}^u$  repräsentieren. Ein System ist im Gleichgewicht, wenn die Summe der virtuellen inneren und äußeren Arbeit identisch null ist. Im Gegensatz zur starken Form der Gleichgewichtsbedingung ist bei der schwachen Form das Gleichgewicht nur integral erfüllt und nicht in jedem materiellen Punkt.

### Schwache Form der nichtlokalen Verzerrungsbilanzen

Die Herleitung der schwachen Form der nichtlokalen Verzerrungsbilanzen erfolgt analog zur Gleichgewichtsbedingung und wird ausführlich anhand der nichtlokalen Verzerrungsbilanz (6.39) erläutert. Unter Berücksichtigung des Gradienten der nichtlokalen effektiven plastischen Verzerrungen  $\boldsymbol{\tau} = \nabla \otimes \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{R,G}^{pl}$  folgt nach Wichtung der nichtlokalen Verzerrungsbilanz (6.39) und der Neumann-Randbedingungen

$$\hat{\mathbf{q}} = \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n} \quad \text{auf} \quad \partial\Omega \quad (7.18)$$

mit der Testfunktion  $\delta \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_G$  die schwache Form zu

$$\int_{\Omega} \delta \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_G : (l^2 \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} - \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{R,G}^{pl} + \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{R,G}^{pl}) \, d\Omega + \int_{\partial\Omega} \delta \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_G : (\hat{\mathbf{q}} - \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n}) \, d(\partial\Omega) = 0 . \quad (7.19)$$

Die Testfunktion kann als virtuelle effektive Spannung interpretiert werden, deren Gradient definiert ist zu  $\delta \boldsymbol{\Lambda} = \nabla \otimes \delta \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_G$ . Partielle Integration des 1. Terms von Gl. (7.19) führt unter Berücksichtigung des Gauß'schen Integralsatzes auf die Arbeitsgleichung

$$\underbrace{- \int_{\Omega} (l^2 \delta \boldsymbol{\Lambda} : \boldsymbol{\tau} + \delta \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_G : (\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{R,G}^{pl} - \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{R,G}^{pl})) \, d\Omega}_{\delta A_{int}^{\bar{\varepsilon}}} + \underbrace{\int_{\partial\Omega} \delta \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_G : \hat{\mathbf{q}} \, d(\partial\Omega)}_{\delta A_{ext}^{\bar{\varepsilon}}} = 0 . \quad (7.20)$$

Entsprechend dem Prinzip der virtuellen Verschiebungen leisten auch hier energetisch konjugierte Variablen aufeinander Arbeit. Die 1. und 2. Term der Arbeitsgleichung repräsentieren die geleistete virtuelle innere Arbeit  $\delta A_{int}^{\bar{\varepsilon}}$ , während der 3. Term der virtuellen äußeren Arbeit  $\delta A_{ext}^{\bar{\varepsilon}}$  entspricht. Die Neumann-Randbedingungen  $\hat{\mathbf{q}}$  werden

allerdings auf dem gesamten Rand zu null gesetzt, so dass der 3. Term der Arbeitsgleichung entfällt. Damit ist gewährleistet, dass für ein homogenes Verzerrungsfeld die nichtlokalen den lokalen effektiven plastischen Verzerrungen identisch sind [116].

Analog dem zuvor beschriebenen Vorgehen führt die Wichtung der nichtlokalen Verzerrungsbilanz (6.40) mit der Testfunktion  $\delta\sigma_{VD}$  auf die Arbeitsgleichung

$$\underbrace{-\int_{\Omega} (l^2 (\nabla \delta\sigma_{VD}) \cdot \nabla \bar{\varepsilon}_{VD}^{pl} + \delta\sigma_{VD} (\bar{\varepsilon}_{VD}^{pl} - \varepsilon_{VD}^{pl})) d\Omega}_{\delta A_{int}^{\bar{\lambda}}} + \underbrace{\int_{\partial\Omega} \delta\sigma_{VD} (\nabla \bar{\varepsilon}_{VD}^{pl} \cdot \mathbf{n}) d(\partial\Omega)}_{\delta A_{ext}^{\bar{\lambda}}} = 0, \quad (7.21)$$

wobei auch hier die Neumann-Randbedingungen auf dem gesamten Rand zu null gesetzt werden. Die Testfunktion  $\delta\sigma_{VD}$  entspricht der virtuellen Vergleichsspannung, die die zur plastischen Vergleichsverzerrung  $\varepsilon_{VD}^{pl}$  energetisch konjugierte Variable ist.

### 7.3.1 Diskretisierung

Die räumliche Diskretisierung der schwachen Form der Randwertaufgabe erfolgt mit Hilfe der Finite-Element-Methode. Hierzu wird das Gebiet  $\Omega$  in  $m_{ele}$  Teilgebiete  $\Omega^e$  bzw. Elemente unterteilt, so dass  $\Omega = \bigcup_{e=1}^{m_{ele}} \Omega^e$  gilt. Der Verlauf einer Feldgröße wird elementweise approximiert und innerhalb eines Elements mit Knotenfreiwerten und normierten Ansatzfunktionen beschrieben. In dieser Arbeit sind die zu bestimmenden Feldgrößen die Verschiebungen  $\mathbf{u}$ , die nichtlokalen effektiven plastischen Verzerrungen  $\bar{\varepsilon}_{R,G}^{pl}$  und die nichtlokale plastische Vergleichsverzerrung  $\bar{\varepsilon}_{VD}^{pl}$ . Ferner sind zur Diskretisierung der Arbeitsgleichungen Ansätze für die virtuellen Verschiebungen  $\delta\mathbf{u}$ , für die virtuellen effektiven Spannungen  $\delta\tilde{\sigma}_G$  und für die virtuelle Vergleichsspannung  $\delta\sigma_{VD}$  vorzugeben. Die Darstellung der funktionalen Zusammenhänge erfolgt nachfolgend abweichend von der bisherigen Notation in Vektor-Matrix-Schreibweise.

Die Verschiebungen  $\mathbf{u}^e$  in einem Element entsprechen dem Produkt der Ansatzfunktion  $N_{u,n}(\xi)$  und des Vektors der Verschiebungsfreiwerte  $\mathbf{z}_{u,n}^e$  summiert über alle Elementknoten  $m_{nod}$ , wobei die Ansatzfunktionen in lokalen, elementbezogenen Koordinaten  $\xi$  definiert sind. Entsprechend dem Bubnov-Galerkin-Verfahren werden für die realen und virtuellen Verschiebungen gleiche Ansatzfunktionen verwendet. So folgt mit dem Vektor der realen bzw. virtuellen Verschiebungsfreiwerte  $\mathbf{z}_{u,n}^e$  bzw.  $\delta\mathbf{z}_{u,n}^e$

$$\mathbf{u}^e = \sum_{n=1}^{m_{nod}} N_{u,n} \mathbf{z}_{u,n}^e = \mathbf{N}_u \mathbf{z}_u^e, \quad \delta\mathbf{u}^e = \sum_{n=1}^{m_{nod}} N_{u,n} \delta\mathbf{z}_{u,n}^e = \mathbf{N}_u \delta\mathbf{z}_u^e. \quad (7.22)$$

Die normierten Ansatzfunktionen dienen bei Verwendung isoparametrischer Elemente zugleich der Beschreibung der Elementgeometrie im globalen Koordinatensystem und

damit des funktionalen Zusammenhangs zwischen lokalen und globalen Koordinaten,

$$\mathbf{x} = \sum_{n=1}^{m_{nod}} N_{u,n} \hat{\mathbf{x}}_n, \quad (7.23)$$

wobei der Vektor  $\hat{\mathbf{x}}_n$  die globalen Koordinaten eines Elementknotens enthält. Die Transformation des Vektors der lokalen partiellen Ableitungen  $\nabla_\xi$  ins globale Koordinatensystem erfolgt mit der Inversen der Jacobi-Matrix  $\mathbf{J}$  und ist definiert zu

$$\nabla_x = \begin{bmatrix} \partial_{x_1} \\ \partial_{x_2} \\ \partial_{x_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_3}{\partial \xi_1} \\ \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} & \frac{\partial x_3}{\partial \xi_2} \\ \frac{\partial x_1}{\partial \xi_3} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_3} & \frac{\partial x_3}{\partial \xi_3} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \partial_{\xi_1} \\ \partial_{\xi_2} \\ \partial_{\xi_3} \end{bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \nabla_\xi. \quad (7.24)$$

Aus den globalen partiellen Ableitungen der realen und virtuellen Verschiebungen folgen der kinematischen Beziehung entsprechend die Verzerrungen

$$\boldsymbol{\varepsilon}^e = \sum_{n=1}^{m_{nod}} \mathbf{B}_{u,n} \mathbf{z}_{u,n}^e = \mathbf{B}_u \mathbf{z}_u^e, \quad \delta \boldsymbol{\varepsilon}^e = \sum_{n=1}^{m_{nod}} \mathbf{B}_{u,n} \delta \mathbf{z}_{u,n}^e = \mathbf{B}_u \delta \mathbf{z}_u^e \quad (7.25)$$

mit

$$\mathbf{B}_{u,n} = N_{u,n} \begin{bmatrix} \partial_{x_1} & 0 & 0 & \partial_{x_2} & \partial_{x_3} & 0 \\ 0 & \partial_{x_2} & 0 & \partial_{x_1} & 0 & \partial_{x_3} \\ 0 & 0 & \partial_{x_3} & 0 & \partial_{x_1} & \partial_{x_2} \end{bmatrix}^T.$$

Die nichtlokalen effektiven plastischen Verzerrungen  $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{R,G}^{pl,e}$  bzw. virtuellen effektiven Spannungen  $\delta \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_G^e$  hingegen sind mit den Ansatzfunktionen  $N_{\bar{\varepsilon},1\dots m_{nod}}(\boldsymbol{\xi})$  und den Vektoren der Verzerrungsfreiwerte  $\mathbf{z}_{\bar{\varepsilon},1\dots m_{nod}}^e$  bzw. virtuellen Spannungsfreiwerte  $\delta \mathbf{z}_{\sigma,1\dots m_{nod}}^e$  definiert zu

$$\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{R,G}^{pl,e} = \sum_{n=1}^{m_{nod}} N_{\bar{\varepsilon},n} \mathbf{z}_{\bar{\varepsilon},n}^e = \mathbf{N}_{\bar{\varepsilon}} \mathbf{z}_{\bar{\varepsilon}}^e, \quad \delta \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_G^e = \sum_{n=1}^{m_{nod}} N_{\bar{\varepsilon},n} \delta \mathbf{z}_{\sigma,n}^e = \mathbf{N}_{\bar{\varepsilon}} \delta \mathbf{z}_{\sigma}^e. \quad (7.26)$$

Für den Gradienten von  $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{R,G}^{pl,e}$  bzw.  $\delta \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_G^e$  gilt

$$\boldsymbol{\tau}^e = \sum_{n=1}^{m_{nod}} \mathbf{B}_{\bar{\varepsilon},n} \mathbf{z}_{\bar{\varepsilon},n}^e = \mathbf{B}_{\bar{\varepsilon}} \mathbf{z}_{\bar{\varepsilon}}^e, \quad \delta \boldsymbol{\Lambda}^e = \sum_{n=1}^{m_{nod}} \mathbf{B}_{\bar{\varepsilon},n} \delta \mathbf{z}_{\sigma,n}^e = \mathbf{B}_{\bar{\varepsilon}} \delta \mathbf{z}_{\sigma}^e \quad (7.27)$$

mit

$$\mathbf{B}_{\bar{\varepsilon},n} = N_{\bar{\varepsilon},n} \begin{bmatrix} \nabla_x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \nabla_x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \nabla_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \nabla_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \nabla_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \nabla_x \end{bmatrix}.$$

Die Approximation der nichtlokalen plastischen Vergleichsverzerrung  $\bar{\varepsilon}_{VD}^{pl,e}$  und der virtuellen Vergleichsspannung  $\delta\sigma_{VD}^e$  erfolgt mit den Ansatzfunktionen  $N_{\bar{\lambda},1\dots m_{nod}}(\xi)$ . Unter Berücksichtigung der Verzerrungsfreiwerte  $z_{\bar{\lambda},1\dots m_{nod}}^e$  bzw. virtuellen Spannungsfreiwerte  $\delta z_{\sigma_V,1\dots m_{nod}}^e$  lautet der Ansatz für die nichtlokale plastische Vergleichsverzerrung bzw. virtuelle Vergleichsspannung im Element

$$\bar{\varepsilon}_{VD}^{pl,e} = \sum_{n=1}^{m_{nod}} N_{\bar{\lambda},n} z_{\bar{\lambda},n}^e = \mathbf{N}_{\bar{\lambda}} \mathbf{z}_{\bar{\lambda}}^e, \quad \delta\sigma_{VD}^e = \sum_{n=1}^{m_{nod}} N_{\bar{\lambda},n} \delta z_{\sigma_V,n}^e = \mathbf{N}_{\bar{\lambda}} \delta \mathbf{z}_{\sigma_V}^e. \quad (7.28)$$

Der Gradient der jeweiligen Feldgröße folgt mit  $\mathbf{B}_{\bar{\lambda},n} = \nabla_x N_{\bar{\lambda},n}$  zu

$$\nabla \bar{\varepsilon}_{VD}^{pl,e} = \sum_{n=1}^{m_{nod}} \mathbf{B}_{\bar{\lambda},n} z_{\bar{\lambda},n}^e = \mathbf{B}_{\bar{\lambda}} \mathbf{z}_{\bar{\lambda}}^e, \quad \nabla \delta\sigma_{VD}^e = \sum_{n=1}^{m_{nod}} \mathbf{B}_{\bar{\lambda},n} \delta z_{\sigma_V,n}^e = \mathbf{B}_{\bar{\lambda}} \delta \mathbf{z}_{\sigma_V}^e. \quad (7.29)$$

In dieser Arbeit werden für das Verschiebungsfeld quadratische und für die beiden nichtlokalen Verzerrungsfelder lineare Ansätze gewählt, so dass die Gesamtverzerrungen und die nichtlokalen Verzerrungen gleichwertig approximiert sind. Demnach sind die Ansatzfunktionen der beiden nichtlokalen Verzerrungsfelder identisch ( $N_{\bar{\varepsilon},n} = N_{\bar{\lambda},n}$ ). Erfolgt die Approximation aller Feldgrößen hingegen mit Ansätzen gleicher Ordnung, sind Oszillationen in den Spannungen zu erwarten [114, 137, 138].

Einsetzen der virtuellen Ansätze  $\delta \mathbf{u}^e$ ,  $\delta \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_G^e$  und  $\delta\sigma_{VD}^e$  sowie der daraus resultierenden Größen  $\delta \boldsymbol{\varepsilon}^e$ ,  $\delta \boldsymbol{\Lambda}^e$  und  $\nabla \delta\sigma_{VD}^e$  in die schwache Form der Gleichgewichtsbedingung und nichtlokalen Verzerrungsbilanzen ergibt die semi-diskretisierten Arbeitsgleichungen

$$\sum_{e=1}^{m_{ele}} \delta \mathbf{z}_u^{eT} \left[ \overbrace{\int_{\Omega^e} \mathbf{B}_u^T \boldsymbol{\sigma} \, d\Omega}^{\mathbf{f}_{int}^{u,e}} - \overbrace{\int_{\Omega^e} \rho \mathbf{N}_u^T \mathbf{b} \, d\Omega}^{\mathbf{f}_{ext}^{u,e}} - \int_{\partial\Omega^e} \mathbf{N}_u^T \hat{\mathbf{t}} \, d(\partial\Omega) \right] = 0, \quad (7.30)$$

$$\sum_{e=1}^{m_{ele}} \delta \mathbf{z}_\sigma^{eT} \left[ \overbrace{\int_{\Omega^e} l^2 \mathbf{B}_{\bar{\varepsilon}}^T \boldsymbol{\tau} \, d\Omega}^{\mathbf{f}_{int}^{\bar{\varepsilon},e}} + \int_{\Omega^e} \mathbf{N}_{\bar{\varepsilon}}^T (\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{R,G}^{pl} - \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{R,G}^{pl}) \, d\Omega \right] = 0, \quad (7.31)$$

$$\sum_{e=1}^{m_{ele}} \delta \mathbf{z}_{\sigma_V}^{eT} \left[ \overbrace{\int_{\Omega^e} l^2 \mathbf{B}_{\bar{\lambda}}^T \nabla \bar{\varepsilon}_{VD}^{pl} \, d\Omega}^{\mathbf{f}_{int}^{\bar{\lambda},e}} + \int_{\Omega^e} \mathbf{N}_{\bar{\lambda}}^T (\bar{\varepsilon}_{VD}^{pl} - \varepsilon_{VD}^{pl}) \, d\Omega \right] = 0, \quad (7.32)$$

die beliebigen virtuellen Verschiebungen bzw. Spannungen genügen sollen. Demzufolge befindet sich ein System im Gleichgewicht, wenn die inneren Knotenkräfte  $\mathbf{f}_{int}^{u,e}$  den äußeren Knotenkräften  $\mathbf{f}_{ext}^{u,e}$  identisch sind. Entsprechendes gilt für die nichtlokalen Verzerrungsbilanzen, wobei aufgrund der gewählten Randbedingungen nur innere Knotenverzerrungen  $\mathbf{f}_{int}^{\bar{\varepsilon},e}$  bzw.  $\mathbf{f}_{int}^{\bar{\lambda},e}$  auftreten. Aus den semi-diskretisierten Arbeitsgleichungen folgt somit die Nullstellenaufgabe

$$\mathbf{R} = \mathbf{F}_{int} - \mathbf{F}_{ext} = \mathbf{0} \quad (7.33)$$

mit

$$\mathbf{F}_{int} = \bigcup_{e=1}^{m_{ele}} \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{int}^{u,e} \\ \mathbf{f}_{int}^{\bar{\varepsilon},e} \\ \mathbf{f}_{int}^{\bar{\lambda},e} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}_{ext} = \bigcup_{e=1}^{m_{ele}} \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{ext}^{u,e} \\ \mathbf{0}^e \\ \mathbf{0}^e \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R} = \bigcup_{e=1}^{m_{ele}} \begin{bmatrix} \mathbf{r}_u^e \\ \mathbf{r}_{\bar{\varepsilon}}^e \\ \mathbf{r}_{\bar{\lambda}}^e \end{bmatrix},$$

wobei  $\mathbf{R}$  den Vektor der Residuen kennzeichnet. Da die nichtlinearen Materialgleichungen in Ratenform definiert sind, ist das Gleichungssystem (7.33) inkrementell iterativ zu lösen. Ausgehend von einem Gleichgewichtszustand zum Zeitpunkt  $t$  ist der neue Gleichgewichtszustand zum Zeitpunkt  $t + 1$  nach einer inkrementellen Zustandsänderung  $\Delta(\cdot) = (\cdot)^{t+1} - (\cdot)^t$  gesucht. Somit gilt zum Zeitpunkt  $t + 1$  für die Knotenkräfte und -verzerrungen

$$\mathbf{f}_{int}^{u,e} = \int_{\Omega^e} \mathbf{B}_u^T (\boldsymbol{\sigma}^t + \Delta \boldsymbol{\sigma}) d\Omega, \quad (7.34)$$

$$\mathbf{f}_{ext}^{u,e} = \int_{\Omega^e} \rho \mathbf{N}_u^T (\mathbf{b}^t + \Delta \mathbf{b}) d\Omega + \int_{\partial\Omega^e} \mathbf{N}_u^T (\hat{\mathbf{t}}^t + \Delta \hat{\mathbf{t}}) d(\partial\Omega), \quad (7.35)$$

$$\mathbf{f}_{int}^{\bar{\varepsilon},e} = \int_{\Omega^e} l^2 \mathbf{B}_{\bar{\varepsilon}}^T (\boldsymbol{\tau}^t + \Delta \boldsymbol{\tau}) d\Omega + \int_{\Omega^e} \mathbf{N}_{\bar{\varepsilon}}^T (\bar{\varepsilon}_{R,G}^{pl,t} + \Delta \bar{\varepsilon}_{R,G}^{pl} - \bar{\varepsilon}_{R,G}^{pl,t} - \Delta \bar{\varepsilon}_{R,G}^{pl}) d\Omega, \quad (7.36)$$

$$\mathbf{f}_{int}^{\bar{\lambda},e} = \int_{\Omega^e} l^2 \mathbf{B}_{\bar{\lambda}}^T \nabla (\bar{\varepsilon}_{VD}^{pl,t} + \Delta \bar{\varepsilon}_{VD}^{pl}) d\Omega + \int_{\Omega^e} \mathbf{N}_{\bar{\lambda}}^T (\bar{\varepsilon}_{VD}^{pl,t} + \Delta \bar{\varepsilon}_{VD}^{pl} - \varepsilon_{VD}^{pl,t} - \Delta \varepsilon_{VD}^{pl}) d\Omega. \quad (7.37)$$

Das Inkrement der massebezogenen Kraft  $\Delta \mathbf{b}$  und das der Randspannungen  $\Delta \hat{\mathbf{t}}$  sind vorgegeben. Das Inkrement der Spannungen  $\Delta \boldsymbol{\sigma}$ , das der effektiven plastischen Verzerrungen  $\Delta \bar{\varepsilon}_{R,G}^{pl}$  und das der plastischen Vergleichsverzerrung  $\Delta \varepsilon_{VD}^{pl}$  hingegen folgen aus den Materialgleichungen (7.11) - (7.13). Tritt keine innere Beanspruchung und damit auch kein Porendruck auf, entfällt der 4. Term in der jeweiligen Materialgleichung. Bei innerer Beanspruchung dagegen ist das Inkrement der volumetrischen Verzerrung der Pore  $\Delta \varepsilon_{PV}$  konstant und geht demnach lediglich als zusätzliche Einwirkung in die Arbeitsgleichungen ein. Ablösen von  $\Delta \boldsymbol{\sigma}$ ,  $\Delta \bar{\varepsilon}_{R,G}^{pl}$  und  $\Delta \varepsilon_{VD}^{pl}$  in Gl. (7.34) - (7.37) ergibt unter Berücksichtigung des Ansatzes für die Verschiebungen  $\mathbf{u}^e$ , des Ansatzes für die nichtlokalen effektiven plastischen Verzerrungen  $\bar{\varepsilon}_{R,G}^{pl,e}$  und des Ansatzes für die nichtlokale plastische Vergleichsverzerrung  $\bar{\varepsilon}_{VD}^{pl,e}$  sowie der daraus resultierenden Größen  $\varepsilon^e$ ,  $\boldsymbol{\tau}^e$  und  $\nabla \bar{\varepsilon}_{VD}^{pl,e}$  die diskretisierten Arbeitsgleichungen. Somit enthält die Nullstellenaufgabe nur noch die Inkremente der Knotenfreiwerte  $\Delta \mathbf{z}_u^e$ ,  $\Delta \mathbf{z}_{\bar{\varepsilon}}^e$  und  $\Delta \mathbf{z}_{\bar{\lambda}}^e$  als Unbekannte.

### 7.3.2 Linearisierung

Die Nullstellenaufgabe wird mit dem Newton-Raphson-Verfahren [161] bzw. Bogenlängenverfahren [113] gelöst. Dies erfordert eine konsistente Linearisierung des Gleichungssystems (7.33). So folgt mit dem Vektor des Inkrements der Knotenfreiwerte  $\Delta \mathbf{z}$

nach Taylor-Reihen-Entwicklung des Vektors der Residuen im Iterationsschritt  $i+1$

$$\mathbf{R}(\mathbf{z}^t + \Delta \mathbf{z}_{i+1}) = \mathbf{R}(\mathbf{z}^t + \Delta \mathbf{z}_i) + \left. \frac{\partial \mathbf{R}(\mathbf{z}^t + \Delta \mathbf{z})}{\partial \Delta \mathbf{z}} \right|_{\Delta \mathbf{z}_i} \Delta \Delta \mathbf{z}_{i+1} = \mathbf{0} , \quad (7.38)$$

wobei  $\Delta \mathbf{z}_{i+1} = \Delta \mathbf{z}_i + \Delta \Delta \mathbf{z}_{i+1}$  die verbesserte Lösung nach dem Iterationsschritt  $i+1$  ergibt. Umformen von Gl. (7.38) führt schließlich auf das linearisierte Gleichungssystem

$$\mathbf{K}_i \Delta \Delta \mathbf{z}_{i+1} = -\mathbf{R}_i \quad (7.39)$$

mit

$$\mathbf{K}_i = \bigcup_{e=1}^{m_{ele}} \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{uu,i}^e & \mathbf{k}_{u\bar{\varepsilon},i}^e & \mathbf{k}_{u\bar{\lambda},i}^e \\ \mathbf{k}_{\bar{\varepsilon}u,i}^e & \mathbf{k}_{\bar{\varepsilon}\bar{\varepsilon},i}^e & \mathbf{k}_{\bar{\varepsilon}\bar{\lambda},i}^e \\ \mathbf{k}_{\bar{\lambda}u,i}^e & \mathbf{k}_{\bar{\lambda}\bar{\varepsilon},i}^e & \mathbf{k}_{\bar{\lambda}\bar{\lambda},i}^e \end{bmatrix}, \quad \Delta \Delta \mathbf{z}_{i+1} = \bigcup_{e=1}^{m_{ele}} \begin{bmatrix} \Delta \Delta \mathbf{z}_{u,i+1}^e \\ \Delta \Delta \mathbf{z}_{\bar{\varepsilon},i+1}^e \\ \Delta \Delta \mathbf{z}_{\bar{\lambda},i+1}^e \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R}_i = \bigcup_{e=1}^{m_{ele}} \begin{bmatrix} \mathbf{r}_{u,i}^e \\ \mathbf{r}_{\bar{\varepsilon},i}^e \\ \mathbf{r}_{\bar{\lambda},i}^e \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{k}_{uu,i}^e = \left. \frac{\partial \mathbf{r}_u^e(\mathbf{z}^t + \Delta \mathbf{z})}{\partial \Delta \mathbf{z}_u^e} \right|_{\Delta \mathbf{z}_i} = \int_{\Omega^e} \mathbf{B}_u^T \mathbf{C}_{uu}^{lin} \mathbf{B}_u \, d\Omega ,$$

$$\mathbf{k}_{u\bar{\varepsilon},i}^e = \left. \frac{\partial \mathbf{r}_u^e(\mathbf{z}^t + \Delta \mathbf{z})}{\partial \Delta \mathbf{z}_{\bar{\varepsilon}}^e} \right|_{\Delta \mathbf{z}_i} = \int_{\Omega^e} \mathbf{B}_u^T \mathbf{C}_{u\bar{\varepsilon}}^{lin} \mathbf{N}_{\bar{\varepsilon}} \, d\Omega ,$$

$$\mathbf{k}_{u\bar{\lambda},i}^e = \left. \frac{\partial \mathbf{r}_u^e(\mathbf{z}^t + \Delta \mathbf{z})}{\partial \Delta \mathbf{z}_{\bar{\lambda}}^e} \right|_{\Delta \mathbf{z}_i} = \int_{\Omega^e} \mathbf{B}_u^T \mathbf{C}_{u\bar{\lambda}}^{lin} \mathbf{N}_{\bar{\lambda}} \, d\Omega ,$$

$$\mathbf{k}_{\bar{\varepsilon}u,i}^e = \left. \frac{\partial \mathbf{r}_{\bar{\varepsilon}}^e(\mathbf{z}^t + \Delta \mathbf{z})}{\partial \Delta \mathbf{z}_u^e} \right|_{\Delta \mathbf{z}_i} = - \int_{\Omega^e} \mathbf{N}_{\bar{\varepsilon}}^T \mathbf{C}_{\bar{\varepsilon}u}^{lin} \mathbf{B}_u \, d\Omega ,$$

$$\mathbf{k}_{\bar{\varepsilon}\bar{\varepsilon},i}^e = \left. \frac{\partial \mathbf{r}_{\bar{\varepsilon}}^e(\mathbf{z}^t + \Delta \mathbf{z})}{\partial \Delta \mathbf{z}_{\bar{\varepsilon}}^e} \right|_{\Delta \mathbf{z}_i} = \int_{\Omega^e} \mathbf{N}_{\bar{\varepsilon}}^T (\mathbf{I} - \mathbf{C}_{\bar{\varepsilon}\bar{\varepsilon}}^{lin}) \mathbf{N}_{\bar{\varepsilon}} \, d\Omega + \int_{\Omega^e} l^2 \mathbf{B}_{\bar{\varepsilon}}^T \mathbf{B}_{\bar{\varepsilon}} \, d\Omega ,$$

$$\mathbf{k}_{\bar{\varepsilon}\bar{\lambda},i}^e = \left. \frac{\partial \mathbf{r}_{\bar{\varepsilon}}^e(\mathbf{z}^t + \Delta \mathbf{z})}{\partial \Delta \mathbf{z}_{\bar{\lambda}}^e} \right|_{\Delta \mathbf{z}_i} = - \int_{\Omega^e} \mathbf{N}_{\bar{\varepsilon}}^T \mathbf{C}_{\bar{\varepsilon}\bar{\lambda}}^{lin} \mathbf{N}_{\bar{\lambda}} \, d\Omega ,$$

$$\mathbf{k}_{\bar{\lambda}u,i}^e = \left. \frac{\partial \mathbf{r}_{\bar{\lambda}}^e(\mathbf{z}^t + \Delta \mathbf{z})}{\partial \Delta \mathbf{z}_u^e} \right|_{\Delta \mathbf{z}_i} = - \int_{\Omega^e} \mathbf{N}_{\bar{\lambda}}^T \mathbf{C}_{\bar{\lambda}u}^{lin} \mathbf{B}_u \, d\Omega ,$$

$$\mathbf{k}_{\bar{\lambda}\bar{\varepsilon},i}^e = \left. \frac{\partial \mathbf{r}_{\bar{\lambda}}^e(\mathbf{z}^t + \Delta \mathbf{z})}{\partial \Delta \mathbf{z}_{\bar{\varepsilon}}^e} \right|_{\Delta \mathbf{z}_i} = - \int_{\Omega^e} \mathbf{N}_{\bar{\lambda}}^T \mathbf{C}_{\bar{\lambda}\bar{\varepsilon}}^{lin} \mathbf{N}_{\bar{\varepsilon}} \, d\Omega ,$$

$$\mathbf{k}_{\bar{\lambda}\bar{\lambda},i}^e = \left. \frac{\partial \mathbf{r}_{\bar{\lambda}}^e(\mathbf{z}^t + \Delta \mathbf{z})}{\partial \Delta \mathbf{z}_{\bar{\lambda}}^e} \right|_{\Delta \mathbf{z}_i} = \int_{\Omega^e} \mathbf{N}_{\bar{\lambda}}^T (1 - \mathbf{C}_{\bar{\lambda}\bar{\lambda}}^{lin}) \mathbf{N}_{\bar{\lambda}} \, d\Omega + \int_{\Omega^e} l^2 \mathbf{B}_{\bar{\lambda}}^T \mathbf{B}_{\bar{\lambda}} \, d\Omega ,$$

$$\mathbf{r}_{u,i}^e = \int_{\Omega^e} \mathbf{B}_u^T (\boldsymbol{\sigma}^t + \Delta \boldsymbol{\sigma}_i) \, d\Omega - \int_{\Omega^e} \rho \mathbf{N}_u^T (\mathbf{b}^t + \Delta \mathbf{b}) \, d\Omega - \int_{\partial \Omega^e} \mathbf{N}_u^T (\hat{\mathbf{t}}^t + \Delta \hat{\mathbf{t}}) \, d(\partial \Omega) ,$$

$$\mathbf{r}_{\bar{\varepsilon},i}^e = \int_{\Omega^e} l^2 \mathbf{B}_{\bar{\varepsilon}}^T (\boldsymbol{\tau}^t + \Delta \boldsymbol{\tau}_i) \, d\Omega + \int_{\Omega^e} \mathbf{N}_{\bar{\varepsilon}}^T (\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{R,G}^{pl,t} + \Delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{R,G}^{pl} - \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{R,G}^{pl,t} - \Delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{R,G}^{pl}) \, d\Omega ,$$

$$\mathbf{r}_{\bar{\lambda},i}^e = \int_{\Omega^e} l^2 \mathbf{B}_{\bar{\lambda}}^T \nabla (\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{VD}^{pl,t} + \Delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{VD}^{pl}) \, d\Omega + \int_{\Omega^e} \mathbf{N}_{\bar{\lambda}}^T (\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{VD}^{pl,t} + \Delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{VD}^{pl} - \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{VD}^{pl,t} - \Delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{VD}^{pl}) \, d\Omega .$$

Der Zusammenbau aller Elementmatrizen  $\mathbf{k}_{(\cdot),i}^e$  ergibt die Systemmatrix  $\mathbf{K}_i$ , die im Allgemeinen unsymmetrisch ist. Die Bestimmung der Elementmatrizen sowie der Residuen  $\mathbf{r}_{u,i}^e$ ,  $\mathbf{r}_{\bar{\varepsilon},i}^e$  und  $\mathbf{r}_{\bar{\lambda},i}^e$  erfolgt numerisch mittels Gauß-Integration. Hierzu sind die Integranden der Elementmatrizen und Residuen in den Gauß-Punkten auszuwerten [2].

Die Materialtangente  $\mathbf{C}_{(\cdot)}^{lin}$  folgen aus der Linearisierung der inkrementellen Form der Materialgleichungen. So gilt bei Verwendung des impliziten Euler-Verfahrens zur Integration der Evolutionsgleichungen (6.57) und (6.58) für die schwache Form

$$\mathbf{r}_{\sigma} = \mathbf{0} = \Delta \varepsilon^{el}|_{t+1} + \Delta \varepsilon^{pl}|_{t+1} - \Delta \varepsilon, \quad (7.40)$$

$$r_{\sigma_P} = 0 = \Delta \varepsilon_{PV}^{el}|_{t+1} + \Delta \varepsilon_{PV}^{pl}|_{t+1} - \Delta \varepsilon_{PV}, \quad (7.41)$$

$$r_{F_D} = 0 = F_D(\boldsymbol{\sigma}^{t+1}, \sigma_P^{t+1}, \bar{\varepsilon}_{R,G}^{pl,t+1}, \bar{\varepsilon}_{VD}^{pl,t+1}, \lambda_D^{t+1}), \quad (7.42)$$

$$r_{F_R} = 0 = F_R(\boldsymbol{\sigma}^{t+1}, \sigma_P^{t+1}, \bar{\varepsilon}_{R,G}^{pl,t+1}, \bar{\varepsilon}_{VD}^{pl,t+1}, \lambda_R^{t+1}) \quad (7.43)$$

mit

$$\Delta \varepsilon^{el}|_{t+1} = \tilde{\mathbf{F}}|_{t+1} : \boldsymbol{\sigma}^{t+1} - \tilde{\mathbf{F}}|_t : \boldsymbol{\sigma}^t + \tilde{\mathbf{F}}_K|_{t+1} \sigma_P^{t+1} - \tilde{\mathbf{F}}_K|_t \sigma_P^t,$$

$$\Delta \varepsilon_{PV}^{el}|_{t+1} = \tilde{\mathbf{F}}_K^T|_{t+1} : \boldsymbol{\sigma}^{t+1} - \tilde{\mathbf{F}}_K^T|_t : \boldsymbol{\sigma}^t + \tilde{F}_I|_{t+1} \sigma_P^{t+1} - \tilde{F}_I|_t \sigma_P^t,$$

$$\Delta \varepsilon^{pl}|_{t+1} = \left. \frac{\partial F_D}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right|_{t+1} \Delta \lambda_D + \left. \frac{\partial F_R}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right|_{t+1} \Delta \lambda_R,$$

$$\Delta \varepsilon_{PV}^{pl}|_{t+1} = \left. \frac{\partial F_D}{\partial \sigma_P} \right|_{t+1} \Delta \lambda_D + \left. \frac{\partial F_R}{\partial \sigma_P} \right|_{t+1} \Delta \lambda_R,$$

wobei der Übersicht halber auf den Index der globalen Iteration verzichtet wird. Eine Taylor-Reihen-Entwicklung der Residuen  $\mathbf{r}_{\sigma}$ ,  $r_{\sigma_P}$ ,  $r_{F_D}$  und  $r_{F_R}$  ergibt bei Vernachlässigung von Termen höherer Ordnung die linearisierten Materialgleichungen, aus denen nach Überführung in die für die Weggrößenformulierung benötigte Form

$$\Delta \Delta \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}_{uu}^{lin} : \Delta \Delta \varepsilon + \mathbf{C}_{u\bar{\varepsilon}}^{lin} : \Delta \Delta \bar{\varepsilon}_{R,G}^{pl} + \mathbf{C}_{u\bar{\lambda}}^{lin} \Delta \Delta \bar{\varepsilon}_{VD}^{pl} + \mathbf{C}_{up}^{lin} \Delta \Delta \varepsilon_{PV}, \quad (7.44)$$

$$\Delta \Delta \bar{\varepsilon}_{R,G}^{pl} = \mathbf{C}_{\bar{\varepsilon}u}^{lin} : \Delta \Delta \varepsilon + \mathbf{C}_{\bar{\varepsilon}\bar{\varepsilon}}^{lin} : \Delta \Delta \bar{\varepsilon}_{R,G}^{pl} + \mathbf{C}_{\bar{\varepsilon}\bar{\lambda}}^{lin} \Delta \Delta \bar{\varepsilon}_{VD}^{pl} + \mathbf{C}_{\bar{\varepsilon}p}^{lin} \Delta \Delta \varepsilon_{PV}, \quad (7.45)$$

$$\Delta \Delta \bar{\varepsilon}_{VD}^{pl} = \mathbf{C}_{\bar{\lambda}u}^{lin} : \Delta \Delta \varepsilon + \mathbf{C}_{\bar{\lambda}\bar{\varepsilon}}^{lin} : \Delta \Delta \bar{\varepsilon}_{R,G}^{pl} + \mathbf{C}_{\bar{\lambda}\bar{\lambda}}^{lin} \Delta \Delta \bar{\varepsilon}_{VD}^{pl} + \mathbf{C}_{\bar{\lambda}p}^{lin} \Delta \Delta \varepsilon_{PV} \quad (7.46)$$

die Materialtangente

$$\mathbf{C}_{uu}^{lin} = \frac{\partial \Delta \boldsymbol{\sigma}}{\partial \Delta \varepsilon}, \quad \mathbf{C}_{u\bar{\varepsilon}}^{lin} = \frac{\partial \Delta \boldsymbol{\sigma}}{\partial \Delta \bar{\varepsilon}_{R,G}^{pl}}, \quad \mathbf{C}_{u\bar{\lambda}}^{lin} = \frac{\partial \Delta \boldsymbol{\sigma}}{\partial \Delta \bar{\varepsilon}_{VD}^{pl}}, \quad \mathbf{C}_{up}^{lin} = \frac{\partial \Delta \boldsymbol{\sigma}}{\partial \Delta \varepsilon_{PV}},$$

$$\mathbf{C}_{\bar{\varepsilon}u}^{lin} = \frac{\partial \Delta \bar{\varepsilon}_{R,G}^{pl}}{\partial \Delta \varepsilon}, \quad \mathbf{C}_{\bar{\varepsilon}\bar{\varepsilon}}^{lin} = \frac{\partial \Delta \bar{\varepsilon}_{R,G}^{pl}}{\partial \Delta \bar{\varepsilon}_{R,G}^{pl}}, \quad \mathbf{C}_{\bar{\varepsilon}\bar{\lambda}}^{lin} = \frac{\partial \Delta \bar{\varepsilon}_{R,G}^{pl}}{\partial \Delta \bar{\varepsilon}_{VD}^{pl}}, \quad \mathbf{C}_{\bar{\varepsilon}p}^{lin} = \frac{\partial \Delta \bar{\varepsilon}_{R,G}^{pl}}{\partial \Delta \varepsilon_{PV}},$$

$$\mathbf{C}_{\bar{\lambda}u}^{lin} = \frac{\partial \Delta \bar{\varepsilon}_{VD}^{pl}}{\partial \Delta \varepsilon}, \quad \mathbf{C}_{\bar{\lambda}\bar{\varepsilon}}^{lin} = \frac{\partial \Delta \bar{\varepsilon}_{VD}^{pl}}{\partial \Delta \bar{\varepsilon}_{R,G}^{pl}}, \quad \mathbf{C}_{\bar{\lambda}\bar{\lambda}}^{lin} = \frac{\partial \Delta \bar{\varepsilon}_{VD}^{pl}}{\partial \Delta \bar{\varepsilon}_{VD}^{pl}}, \quad \mathbf{C}_{\bar{\lambda}p}^{lin} = \frac{\partial \Delta \bar{\varepsilon}_{VD}^{pl}}{\partial \Delta \varepsilon_{PV}}$$



resultieren. Die Herleitung ihrer Bestimmungsgleichungen erfolgt analog zu dem in Abschnitt 7.1 beschriebenen Vorgehen. Da in dieser Arbeit entweder der Porendruck identisch null oder das Inkrement der volumetrischen Verzerrung der Pore konstant ist, gilt  $C_{up}^{lin} = 0$ ,  $C_{\bar{\varepsilon}_p}^{lin} = 0$  und  $C_{\lambda_p}^{lin} = 0$ .

## Ermittlung der volumetrischen Verzerrung der Pore

Das entwickelte Modell berücksichtigt innere Beanspruchungen in Form von treibenden Angriffen. Zu den treibenden Angriffen zählt u. a. das Sulfattreiben, bei dem das Wachstum von Ettringitkristallen im Porenraum eine Schädigung des Materials bewirken kann. Zur Simulation dieses chemisch bedingten Prozesses wird der Volumenanteil des Ettringits  $\rho_E^{t+1} = \rho_E^t + \Delta\rho_E$ , der dem Volumenverhältnis von Ettringit zu RVE entspricht, im Element vorgegeben und sukzessive gesteigert. Ob infolge des Ettringitzuwachses Porendruck entsteht, zeigt ein Vergleich mit dem Volumenanteil der Pore  $\rho_P (1 + \varepsilon_{PV}^{t+1})$ . So folgt mit der Spannungs-Verzerrungs-Beziehung (6.54) unter Vernachlässigung der aus Porendruck resultierenden elastischen Verzerrung die Bedingung

$$\rho_E^{t+1} \leq \rho_P \left( 1 + \tilde{\mathbf{F}}_K^T|_{t+1} : \boldsymbol{\sigma}^{t+1} + \varepsilon_{PV}^{pl,t+1} \right). \quad (7.47)$$

Ist diese verletzt, tritt Porendruck auf, weil das zum Ettringitwachstum zur Verfügung stehende Porenvolumen geringer ist als der Volumenbedarf des Ettringits. Aus der Forderung  $\rho_E^{t+1} = \rho_P (1 + \varepsilon_{PV}^{t+1})$  resultiert dann unter der Annahme der Inkompressibilität des Ettringits das Inkrement der volumetrischen Verzerrung der Pore

$$\Delta\varepsilon_{PV} = \frac{\rho_E^t + \Delta\rho_E}{\rho_P} - 1 - \varepsilon_{PV}^t = \text{const.} \quad (7.48)$$

## 7.4 Lösungsalgorithmus

Neben der globalen Iteration zur Bestimmung der Knotenfreiwerte ist eine lokale Iteration notwendig, um bei Verletzung der Fließbedingungen die Spannungen auf die Fließfläche zurückzuführen. Die Rückführung erfolgt mit Hilfe des Closest-Point-Algorithmus, dem das implizite Euler-Verfahren zugrunde liegt. Dabei ist die Überprüfung der Fließbedingungen und die gegebenenfalls erforderliche Korrektur des Spannungszustands lediglich in den Gauß-Punkten durchzuführen, da für den Aufbau des globalen Gleichungssystems (7.39) nur Werte in den Gauß-Punkten relevant sind.

Ein globaler Iterationsschritt ergibt die verbesserten Knotenfreiwerte  $\mathbf{z}^{t+1} = \mathbf{z}^t + \Delta\mathbf{z}_{i+1}$ , mit denen die aktuellen Verzerrungen  $\boldsymbol{\varepsilon}^{t+1}$  sowie die aktuellen effektiven Nachgiebigkeitstensoren  $\tilde{\mathbf{F}}(\bar{\varepsilon}_{R,G}^{pl,t+1}, \bar{\varepsilon}_{VD}^{pl,t+1})$ ,  $\tilde{\mathbf{F}}_K(\bar{\varepsilon}_{R,G}^{pl,t+1}, \bar{\varepsilon}_{VD}^{pl,t+1})$  und  $\tilde{\mathbf{F}}_I(\bar{\varepsilon}_{R,G}^{pl,t+1}, \bar{\varepsilon}_{VD}^{pl,t+1})$  in den Gauß-Punkten berechnet werden. Mit den aktuellen Größen wird in einem Prädiktorschritt unter der Annahme elastischen Materialverhaltens ein Testspannungszustand

- ohne Porendruck

$$\boldsymbol{\sigma}^{tr} = \tilde{\mathbf{F}}^{-1}|_{t+1} : (\boldsymbol{\varepsilon}^{t+1} - \boldsymbol{\varepsilon}^{pl,t}), \quad (7.49)$$

$$\sigma_P^{tr} = 0, \quad (7.50)$$

- mit Porendruck

$$\boldsymbol{\sigma}^{tr} = \left( \tilde{\mathbf{F}} - \tilde{\mathbf{F}}_K \otimes \tilde{\mathbf{F}}_K^T / \tilde{F}_I \right)^{-1} |_{t+1} : \left( \boldsymbol{\varepsilon}^{t+1} - \boldsymbol{\varepsilon}^{pl,t} - (\tilde{\mathbf{F}}_K / \tilde{F}_I) |_{t+1} (\varepsilon_{PV}^{t+1} - \varepsilon_{PV}^{pl,t}) \right), \quad (7.51)$$

$$\sigma_P^{tr} = \tilde{F}_I^{-1} |_{t+1} \left( \varepsilon_{PV}^{t+1} - \varepsilon_{PV}^{pl,t} - \tilde{\mathbf{F}}_K^T |_{t+1} : \boldsymbol{\sigma}^{tr} \right) \quad (7.52)$$

ermittelt. Genügt dieser den Fließbedingungen  $F_D(\boldsymbol{\sigma}^{tr}, \sigma_P^{tr}, \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{R,G}^{pl,t+1}, \bar{\varepsilon}_{VD}^{pl,t+1}, \lambda_D^t) \leq 0$  und  $F_R(\boldsymbol{\sigma}^{tr}, \sigma_P^{tr}, \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{R,G}^{pl,t+1}, \bar{\varepsilon}_{VD}^{pl,t+1}, \lambda_R^t) \leq 0$ , dann ist der aktuelle Spannungszustand dem Testspannungszustand identisch, so dass  $\boldsymbol{\sigma}^{t+1} = \boldsymbol{\sigma}^{tr}$  und  $\sigma_P^{t+1} = \sigma_P^{tr}$  gilt. Ist hingegen eine Fließbedingung verletzt, so ist ein Korrektorschritt erforderlich. Im Korrektorschritt wird mit den aus der globalen Iteration ermittelten Verzerrungen und Nachgiebigkeitstensoren ein neuer Gleichgewichtszustand bestimmt, der sämtlichen Materialgleichungen genügt. Zur Ermittlung des neuen Gleichgewichtszustands wird die aus den Materialgleichungen (7.40) - (7.43) resultierende nichtlineare Nullstellenaufgabe mit dem Newton-Raphson-Verfahren gelöst. Für den Fall, dass Porendruck vorhanden ist und der Testspannungszustand beide Fließbedingungen verletzt, sind die Inkremente  $\Delta\boldsymbol{\sigma}$ ,  $\Delta\sigma_P$ ,  $\Delta\lambda_D$  und  $\Delta\lambda_R$  die Unbekannten. Die Inkremente der Verzerrungen  $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}$ , der nichtlokalen effektiven plastischen Verzerrungen  $\Delta\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{R,G}^{pl}$  und der nichtlokalen plastischen Vergleichsverzerrung  $\Delta\bar{\varepsilon}_{VD}^{pl}$  hingegen bleiben während der lokalen Iteration konstant. Somit führt die Linearisierung der Nullstellenaufgabe nach Übergang auf die Vektor-Matrix-Schreibweise auf das Gleichungssystem

$$\overbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial r_\sigma}{\partial(\Delta\sigma)} & \frac{\partial r_\sigma}{\partial(\Delta\sigma_P)} & \frac{\partial r_\sigma}{\partial(\Delta\lambda_D)} & \frac{\partial r_\sigma}{\partial(\Delta\lambda_R)} \\ \frac{\partial r_{\sigma_P}}{\partial(\Delta\sigma)} & \frac{\partial r_{\sigma_P}}{\partial(\Delta\sigma_P)} & \frac{\partial r_{\sigma_P}}{\partial(\Delta\lambda_D)} & \frac{\partial r_{\sigma_P}}{\partial(\Delta\lambda_R)} \\ \frac{\partial r_{F_D}}{\partial(\Delta\sigma)} & \frac{\partial r_{F_D}}{\partial(\Delta\sigma_P)} & \frac{\partial r_{F_D}}{\partial(\Delta\lambda_D)} & \frac{\partial r_{F_D}}{\partial(\Delta\lambda_R)} \\ \frac{\partial r_{F_R}}{\partial(\Delta\sigma)} & \frac{\partial r_{F_R}}{\partial(\Delta\sigma_P)} & \frac{\partial r_{F_R}}{\partial(\Delta\lambda_D)} & \frac{\partial r_{F_R}}{\partial(\Delta\lambda_R)} \end{bmatrix}}^{K_{M,j}} \underbrace{\begin{bmatrix} \Delta\Delta\boldsymbol{\sigma} \\ \Delta\Delta\sigma_P \\ \Delta\Delta\lambda_D \\ \Delta\Delta\lambda_R \end{bmatrix}}_{\Delta\Delta\mathbf{z}_{M,j+1}} = - \underbrace{\begin{bmatrix} r_\sigma \\ r_{\sigma_P} \\ r_{F_D} \\ r_{F_R} \end{bmatrix}}_{\mathbf{R}_{M,j}}, \quad (7.53)$$

das im Iterationsschritt  $j+1$  die verbesserte Lösung  $\Delta\mathbf{z}_{M,j+1} = \Delta\mathbf{z}_{M,j} + \Delta\Delta\mathbf{z}_{M,j+1}$  ergibt. Unterschreitet die Norm des Vektors der Residuen  $\mathbf{R}_M$  während der Iteration die vorgegebene Fehlertoleranz  $\epsilon_{tol}$ , sind die Ergebnisse hinreichend genau approximiert und die lokale Iteration wird beendet. Allerdings ist für den ermittelten Gleichgewichtszustand noch zu prüfen, ob dieser den Kuhn-Tucker-Bedingungen (6.26) genügt. Ist einer der Lagrange'schen Multiplikatoren negativ, so wird die entsprechende Fließbedingung deaktiviert und die Iteration mit der verbleibenden Fließbedingung erneut durchgeführt.

Genügt der ausiterierte Gleichgewichtszustand den Kuhn-Tucker-Bedingungen, werden die Materialtangente  $C_{(\cdot)}^{lin}$  bestimmt. Sobald auch in der globalen Iteration die Norm des Vektors der Residuen  $R$  die Fehlertoleranz  $\epsilon_{tol}$  unterschreitet, ist der neue Gleichgewichtszustand gefunden und die globale Iteration wird beendet. Der Algorithmus zur Lösung der nichtlinearen Randwertaufgabe ist im Bild 7.1 zusammengefasst.

#### Schleife über alle Inkremente

$$\hat{u}^{t+1} = \hat{u}^t + \Delta \hat{u}, \quad \hat{t}^{t+1} = \hat{t}^t + \Delta \hat{t}, \quad b^{t+1} = b^t + \Delta b$$

#### Globale Iteration zur Bestimmung der Knotenfreiwerte

- Ist Porendruck vorhanden?  $\rho_E^{t+1} > \rho_P \left(1 + \tilde{F}_K^T|_{t+1} : \sigma^{t+1} + \varepsilon_{PV}^{pl,t+1}\right)$   
 Ja  $\Rightarrow \sigma_P > 0, \Delta \varepsilon_{PV} = \text{const}$   
 Nein  $\Rightarrow \sigma_P = 0, \Delta \varepsilon_{PV} \neq 0$
- Aufbau der Systemmatrix  $K_i$
- Aufbau des Vektors der Residuen  $R_i$
- Einbau der Dirichlet-Randbedingungen  $\Delta \hat{u}$
- Lösen des Gleichungssystems  $K_i \Delta \Delta z_{i+1} = -R_i$
- Bestimmung der Testspannungen (Prädiktorschritt)  $\sigma^{tr}, \sigma_P^{tr}$
- Genügen die Testspannungen den Fließbedingungen?  $F_D \leq 0, F_R \leq 0$   
 Ja  $\Rightarrow \sigma^{t+1} = \sigma^{tr}, \sigma_P^{t+1} = \sigma_P^{tr}, \varepsilon^{pl,t+1} = \varepsilon^{pl,t}, \varepsilon_{PV}^{pl,t+1} = \varepsilon_{PV}^{pl,t}$   
 Nein  $\Rightarrow$  Korrektorschritt

#### Lokale Iteration zur Korrektur des Gleichgewichtszustands

- Lösen des Gleichungssystems  $K_{M,j} \Delta \Delta z_{M,j+1} = -R_{M,j}$
- Konvergenzabfrage  $\|R_M\| \leq \epsilon_{tol}$
- Prüfen der Kuhn-Tucker-Bedingungen  $\Delta \lambda_D \geq 0, \Delta \lambda_R \geq 0$

$$\Rightarrow \sigma^{t+1}, \sigma_P^{t+1}, \varepsilon^{pl,t+1}, \varepsilon_{PV}^{pl,t+1}$$

- Bestimmung der Materialtangente  $C_{(\cdot)}^{lin}$
- Konvergenzabfrage  $\|R\| \leq \epsilon_{tol}$

Bild 7.1: Lösungsschema für die Randwertaufgabe

## 8 Strukturanalysen

Das entwickelte Materialmodell wird anhand ausgewählter Strukturbeispiele verifiziert, wobei eine erweiterte Kontinuumstheorie die Unabhängigkeit der Simulationsergebnisse von der Diskretisierung gewährleistet. Zunächst wird das grundsätzliche Modellverhalten am Beispiel eines auf Zug beanspruchten Stabs erläutert.

### 8.1 Stab unter Zugbeanspruchung

Die Abmessungen des Stabs sind entsprechend dem Versuch von Reinhardt [122] gewählt. Für die numerische Simulation dieses Versuchs wird die Anfangsfließspannung  $\sigma_{FR0}$  im mittleren Bereich des Stabs auf einer Breite von 5 mm verringert. Die Systemdaten und simulationsrelevanten Modellparameter sind Bild 8.1 zu entnehmen, wobei die Diskretisierung der Struktur mit zwei Elementen pro Millimeter erfolgt. Eine feinere Diskretisierung bewirkt nahezu keine Änderung der Simulationsergebnisse und bestätigt somit die regularisierende Wirkung des entwickelten Materialmodells.

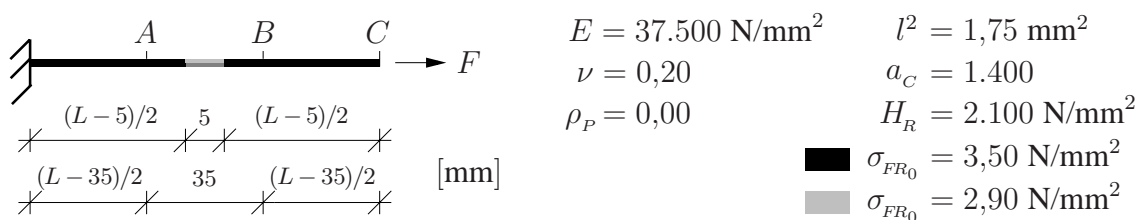


Bild 8.1: Systemdaten und Modellparameter

Kennzeichnend für das Strukturverhalten im Nachbruchbereich ist dessen Abhängigkeit von der Stablänge  $L$ . Dies liegt darin begründet, dass nach Überschreiten der Anfangsfließspannung fortschreitendes Risswachstum zu einer Lokalisierung der Verformungen führt. Eine für Beton repräsentative Materialantwort ist nur zu erwarten, wenn die Verformungen in der Lokalisierungszone unabhängig von der Stablänge erfasst werden.

Das linke Diagramm in Bild 8.2 stellt die Ergebnisse von Simulation und Experiment gegenüber. Die Stablänge hat in dieser Darstellung keinen Einfluss auf die Ergebnisse, da die Spannung über der Verschiebungsdifferenz der Punkte A und B, die einen von der Stablänge unabhängigen Abstand aufweisen, aufgetragen ist. Das rechte Diagramm

hingegen verdeutlicht den Einfluss der Stablänge auf das Strukturverhalten, welches mit der Spannung und normierten Verschiebung am Stabende charakterisiert ist. Je größer der Bereich elastischen Materialverhaltens, desto schneller fällt die Spannung nach Überschreiten der Traglast ab. Für  $L = 400$  mm ist sogar ein Snap-Back-Verhalten der Struktur zu erkennen. Dieses weist lediglich bei rein elastischer Verformung ein von der Stablänge unabhängiges Verhalten auf.

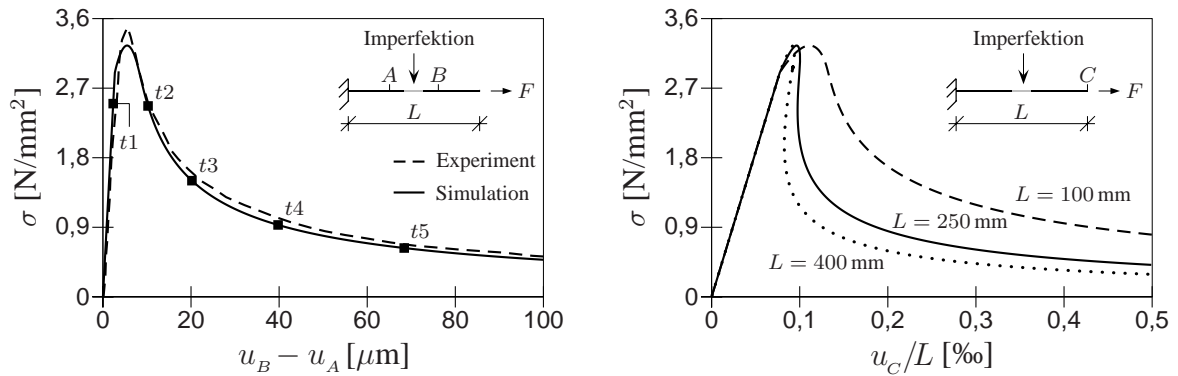


Bild 8.2: Spannung über Verschiebungsdifferenz bzw. normierter Endverschiebung

Solange keine irreversiblen Verformungen auftreten, ist der Verlauf der Verschiebung entlang des Stabs linear, wie im linken Diagramm in Bild 8.3 zum Zeitpunkt  $t_1$  dargestellt. Erst nach Überschreiten der Anfangsfließspannung findet eine Lokalisierung der Verformungen im Bereich der vorgegebenen materiellen Imperfektion statt. Zugleich wächst die Schädigung kontinuierlich an. Die Zone, in der Schädigung und Verformungen lokalisieren, ist hier größer als die Elementbreite und der Bereich der materiellen Imperfektion. Demnach ist das entwickelte Materialmodell in der Lage, eine von der Diskretisierung unabhängige Lokalisierungszone endlicher Breite abzubilden.

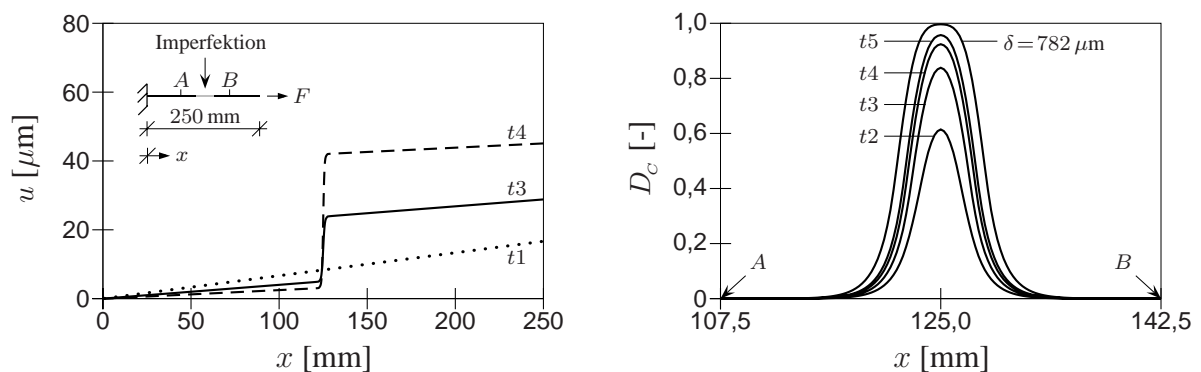


Bild 8.3: Entwicklung des Verschiebungs- und Schädigungsverlaufs

Die zu beobachtende Aufweitung der Lokalisierungszone bei großen Verschiebungsdifferenzen  $\delta = u_B - u_A$  ist Folge der kontinuumsmechanischen Beschreibung des makroskopischen Risses. Um die Aufweitung der Lokalisierungszone zu vermeiden, verwendet Geers [49] eine veränderliche interne Länge.

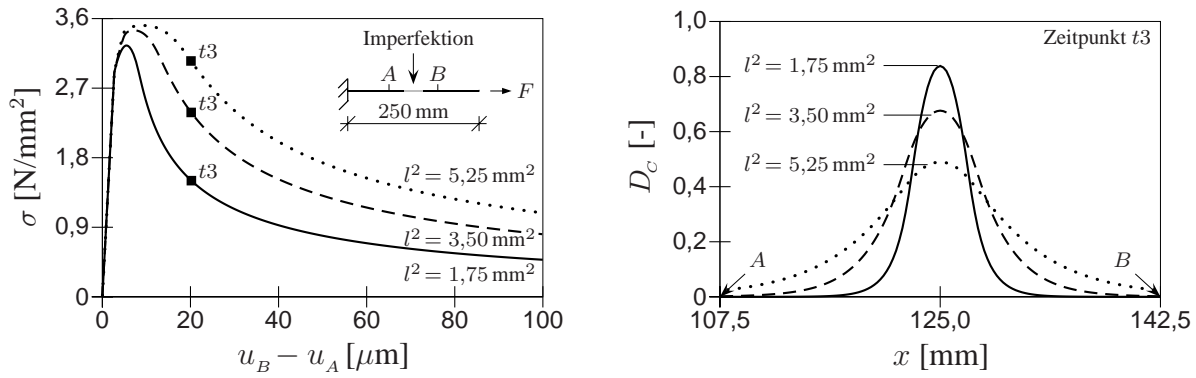


Bild 8.4: Einfluss der internen Länge auf das Verformungsverhalten und die Schädigung

Die interne Länge beeinflusst sowohl die räumliche Ausdehnung der Lokalisierungszone als auch das Verformungsverhalten. Je größer die interne Länge, desto größer ist die räumliche Ausdehnung der Schädigung, wie das rechte Diagramm in Bild 8.4 zum Zeitpunkt  $t_3$  verdeutlicht. Ferner bedingt eine Vergrößerung der internen Länge eine Steigerung der Traglast und ein duktileres Verhalten, wie das linke Diagramm zeigt.

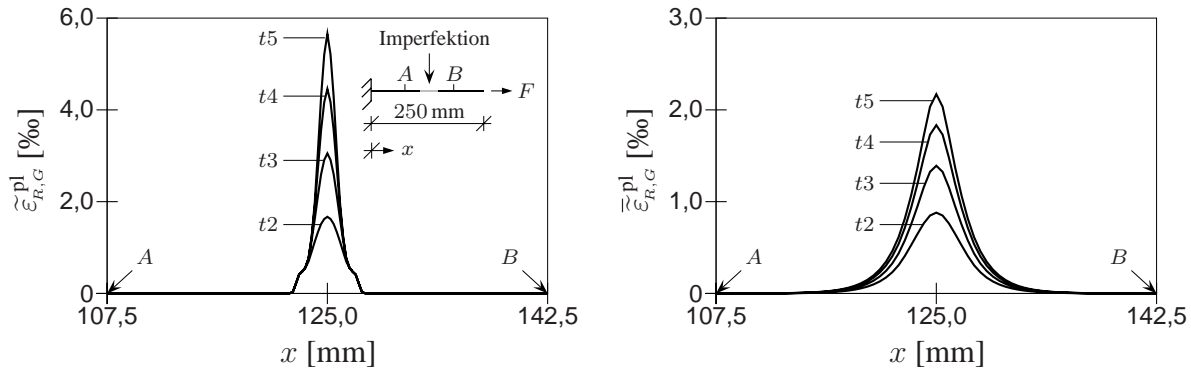


Bild 8.5: Verlauf der lokalen und nichtlokalen effektiven plastischen Verzerrung

Die Schädigungsentwicklung unter Zugbeanspruchung hängt von der nichtlokalen effektiven plastischen Verzerrung  $\tilde{\varepsilon}_{R,G}^{pl}$  ab, welche aus der lokalen effektiven plastischen Verzerrung  $\tilde{\varepsilon}_{R,G}^{pl}$  resultiert. Den Verlauf beider Verzerrungen zeigt Bild 8.5, wobei die nichtlokale gegenüber der lokalen effektiven plastischen Verzerrung eine größere räumliche Ausdehnung aufweist. Nur für den Grenzfall  $l \rightarrow 0$  ist die räumliche Ausdehnung von lokaler und nichtlokaler effektiver plastischer Verzerrung identisch.

## 8.2 Stab unter Druckbeanspruchung

Lee & Willam [85] untersuchen das Verformungsverhalten von Normalbeton unter ein-axialer Druckbeanspruchung an Zylindern. Die Last wird über Stahlplatten eingeleitet, wobei die Oberfläche der Zylinder geschliffen und mit Schmierfett versehen ist, um den

Einfluss von Querspannungen im Bereich der Lasteinleitung zu minimieren. Die numerische Simulation des Versuchs kann vereinfacht an einem Stab erfolgen. In Bild 8.6 sind die Systemdaten und simulationsrelevanten Modellparameter angegeben.

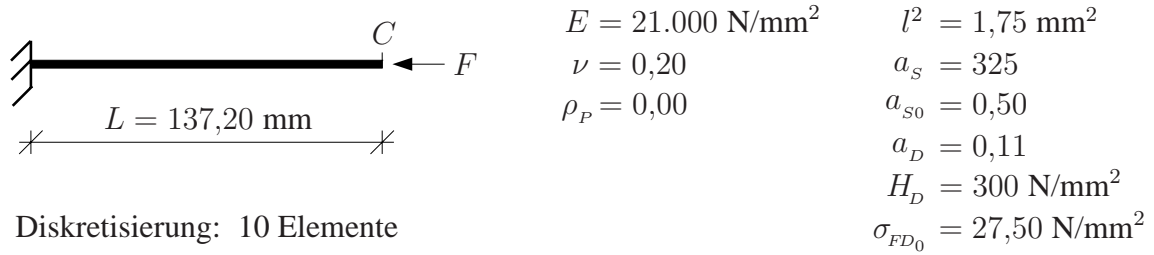


Bild 8.6: Systemdaten und Modellparameter

Die interne Länge hat in diesem Versuch keinen Einfluss auf das Verformungsverhalten, da im Gegensatz zum vorherigen Beispiel die Verformungen nicht lokalisieren und demnach die plastische Verzerrung über den gesamten Stab konstant verteilt ist. Die nichtlokale plastische Vergleichsverzerrung  $\bar{\varepsilon}_{VD}^{pl}$ , welche die Schädigungsentwicklung unter Druckbeanspruchung bestimmt, ist somit der lokalen plastischen Vergleichsverzerrung  $\varepsilon_{VD}^{pl}$  identisch. Bild 8.7 stellt die Ergebnisse von numerischer Simulation und Experiment gegenüber. Sowohl der Abfall der Anfangssteifigkeit als auch die irreversiblen Verformungen stimmen mit den Ergebnissen von Lee & Willam sehr gut überein. Das Abknicken der experimentell ermittelten Kurve zu Beginn des Versuchs ist materialuntypisch und auf Veränderungen der Versuchskonfiguration beim Anfahren zurückzuführen. Daher ist im Diagramm die aus der numerischen Simulation resultierende Kurve um  $u_C/L = -0,17 \text{ ‰}$  verschoben.

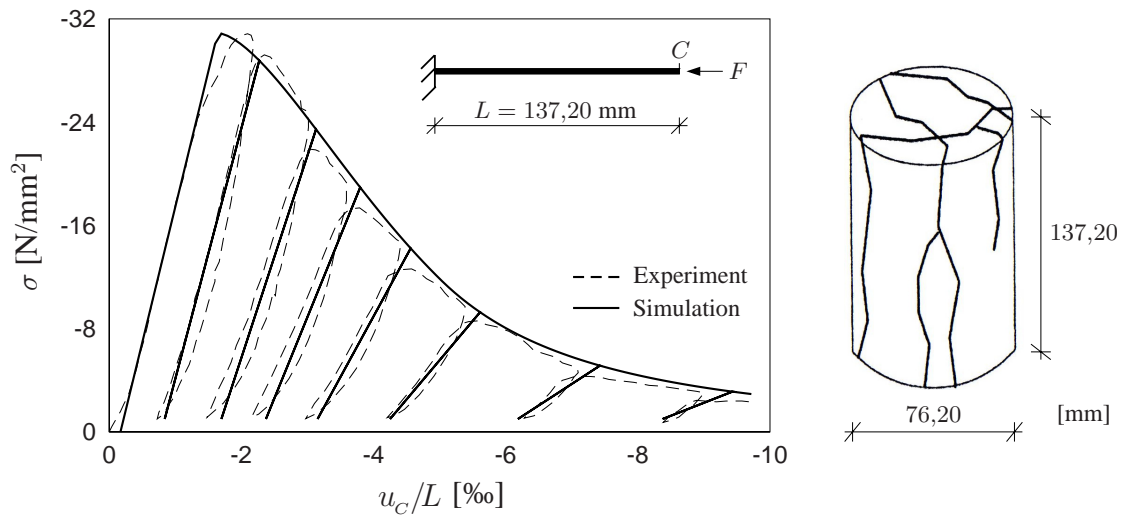


Bild 8.7: Spannung über normierter Endverschiebung - Rissmuster nach [85]

Der unterschiedliche Verlauf der Be- und Entlastungspfade ist typisch für visko-plastisches Verhalten. Da das entwickelte Materialmodell dieses nicht berücksichtigt, sind Be- und Entlastungspfad in der numerischen Simulation identisch.



### 8.3 Direkter Zugversuch

Am Beispiel des direkten Zugversuchs von Reinhardt [122] werden Auswirkungen der Diskretisierung, der Ordnung der Ansatzfunktionen und der Elementgeometrie auf das Verformungsverhalten untersucht. Sofern nicht explizit angegeben, werden im Folgenden für die Verschiebungen  $u$  quadratische und für die nichtlokalen Verzerrungen  $\tilde{\varepsilon}_{R,G}^{pl}$  und  $\bar{\varepsilon}_{VD}^{pl}$  lineare Ansatzfunktionen verwendet. Die Systemdaten und Modellparameter sind Bild 8.8 zu entnehmen.

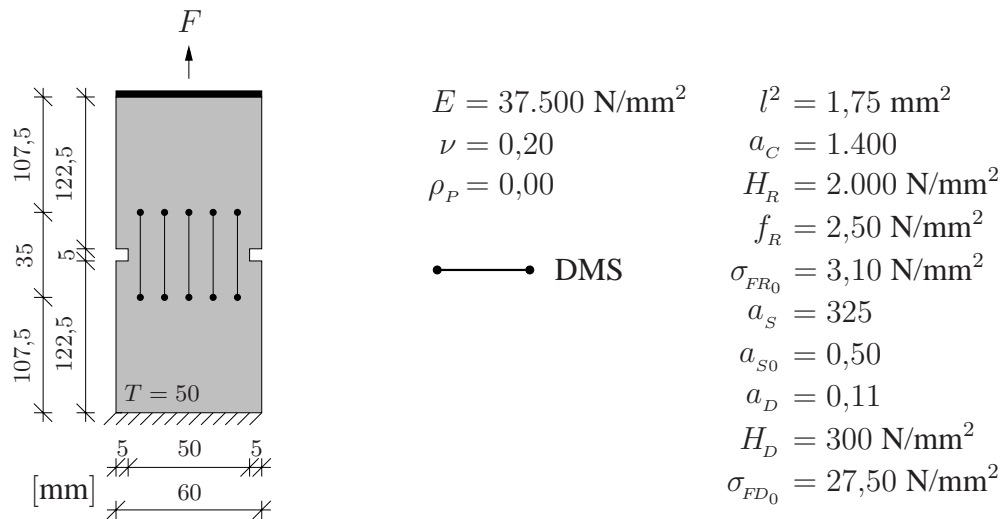


Bild 8.8: Systemdaten und Modellparameter

Die Lasteinleitung erfolgt über aufgeklebte Stahlplatten am oberen und unteren Rand des Prüfkörpers. Dieser besteht aus Normalbeton, weist eine Dicke von  $T = 50 \text{ mm}$  auf und ist im mittleren Bereich beidseitig gekerbt, um dort die Rissbildung zu forcieren. Die mit der Rissbildung einhergehende Lokalisierung von Verformungen wird im Experiment von fünf mittig angeordneten Dehnmessstreifen (DMS) erfasst, welche die Verschiebungsdifferenzen zwischen Punkten ober- und unterhalb der Kerbe messen. Der Mittelwert der Längenänderung aller Dehnmessstreifen ergibt die Verschiebungsdifferenz  $\delta$ , die zusammen mit der über den geschwächten Querschnitt gemittelten Spannung  $\langle \sigma \rangle$  das Verformungsverhalten charakterisiert.

Die numerische Simulation des Versuchs erfolgt im ebenen Spannungszustand unter Ausnutzung der Symmetrie des Prüfkörpers. Dieser wird durch eine am oberen Rand mittig angreifende Einzelkraft  $F$  beansprucht, deren Größe in der numerischen Simulation das Bogenlängenverfahren steuert. Der untere Rand des Prüfkörpers ist fest eingespannt, während der obere Rand lediglich horizontal unverschieblich gelagert ist. Am oberen Rand wird allerdings eine konstante vertikale Verschiebung erzwungen, um die Lasteinleitung über die starre Stahlplatte zu simulieren. Die daraus resultierenden Nebenbedingungen für die vertikalen Verschiebungen sind entsprechend der Arbeit von Kröplin & Dinkler [79] mit Hilfe Lagrange'scher Multiplikatoren berücksichtigt.

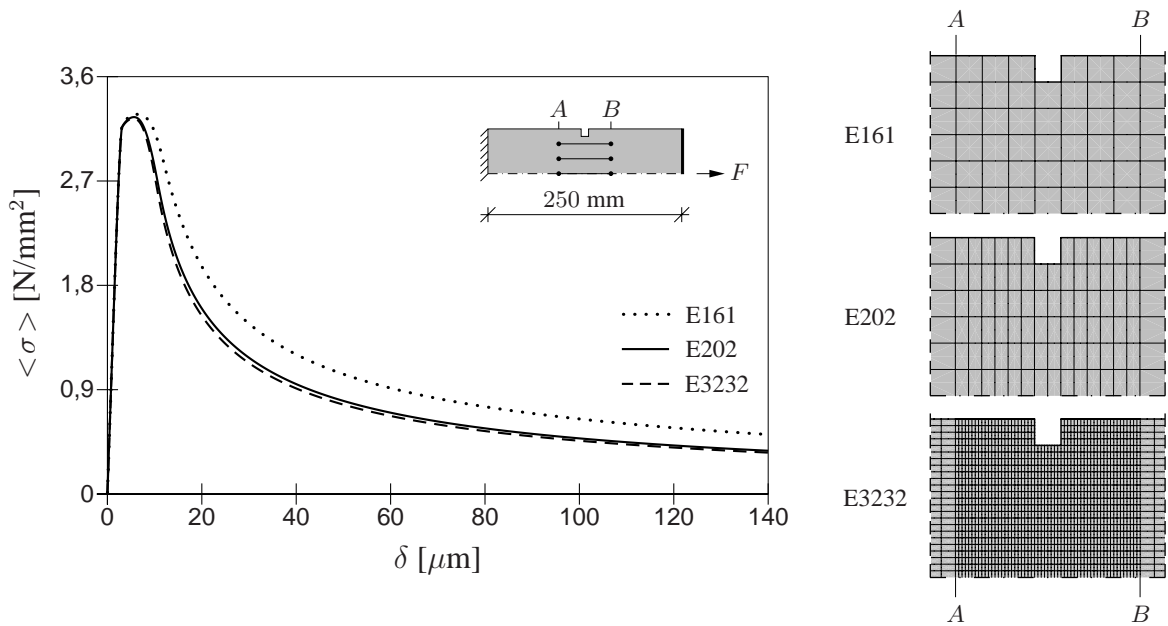


Bild 8.9: Einfluss der Diskretisierung auf das Verformungsverhalten

Zur Untersuchung des Konvergenzverhaltens erfolgt die Diskretisierung der Struktur mit 161, 202 bzw. 3232 Rechteckelementen, wobei der mittlere Bereich für die Diskretisierung von signifikanter Bedeutung ist, da nur dort Risse entstehen. Für die regularisierende Wirkung nichtlokaler, gradientenerweiterter Materialmodelle ist das Verhältnis von interner Länge  $l$  zur Elementgröße im Bereich der Lokalisierungszone entscheidend. Erst eine hinreichend feine Diskretisierung der Lokalisierungszone führt zu diskretisierungsunabhängigen und damit konvergenten Lösungen, wie Bild 8.9 verdeutlicht. Insbesondere die Elementbreite orthogonal zum Riss beeinflusst das Konvergenzverhalten. In der Lokalisierungszone sollte daher die maximale Breite

$$h_{max} \leq 2l \quad (8.1)$$

eines Elements orthogonal zum Riss, d. h. in Richtung der Normalen zur Rissfläche, nicht mehr als das Doppelte der internen Länge betragen, vergleiche Bild 8.10.

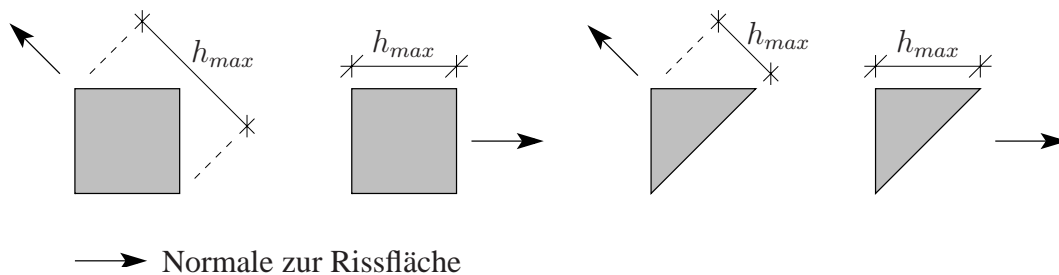


Bild 8.10: Maximal zulässige Elementbreite in der Lokalisierungszone

Neben der Diskretisierung kann die Ordnung der Ansatzfunktionen und die Elementgeometrie die Simulationsergebnisse beeinflussen. Die Auswirkungen der daraus resultierenden unterschiedlichen Elementformulierungen werden anhand der Elemente

- Q4Q4: Rechteckelement mit linearen Ansätzen für die Verschiebungen und für die nichtlokalen Verzerrungen,
- Q9Q4: Rechteckelement mit quadratischen Ansätzen für die Verschiebungen und mit linearen Ansätzen für die nichtlokalen Verzerrungen,
- Q9Q9: Rechteckelement mit quadratischen Ansätzen für die Verschiebungen und für die nichtlokalen Verzerrungen,
- T3T3: Dreieckelement mit linearen Ansätzen für die Verschiebungen und für die nichtlokalen Verzerrungen,
- T6T3: Dreieckelement mit quadratischen Ansätzen für die Verschiebungen und mit linearen Ansätzen für die nichtlokalen Verzerrungen,
- T6T6: Dreieckelement mit quadratischen Ansätzen für die Verschiebungen und für die nichtlokalen Verzerrungen

untersucht. Wie in Bild 8.11 ersichtlich, ist der Einfluss der Elementformulierung auf das Verformungsverhalten bei hinreichend feiner Diskretisierung gering. Allerdings treten in der Lokalisierungszone für die Spannung  $\sigma_{11}$  bei allen Elementformulierungen Oszillationen auf, wie Bild 8.12 verdeutlicht.

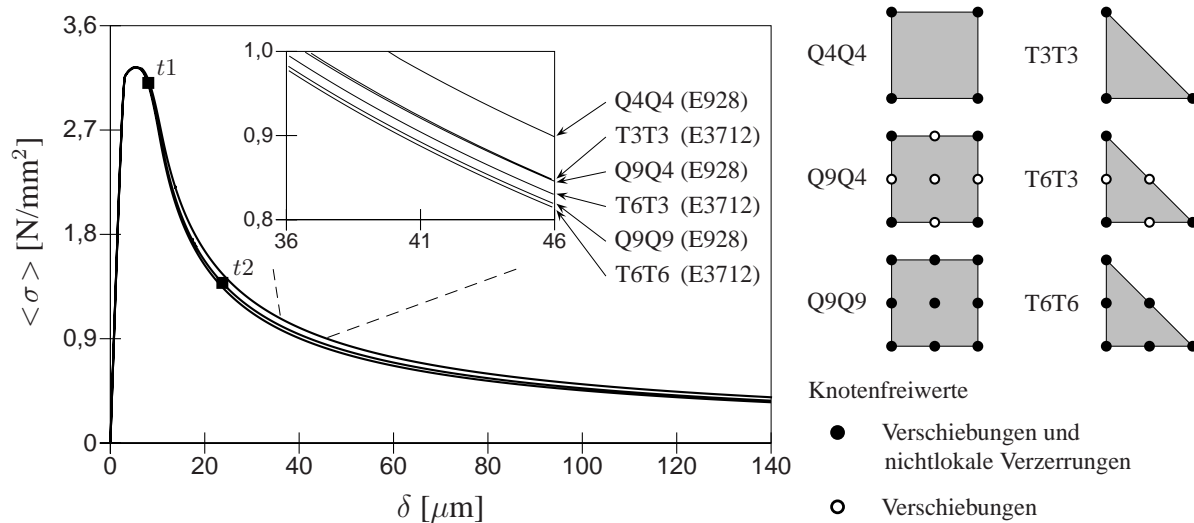


Bild 8.11: Einfluss der Elementformulierung auf das Verformungsverhalten

Je feiner die Auflösung der Lokalisierungszone, desto geringer sind die Spannungsoszillationen. Allerdings fallen diese bei Verwendung quadratischer Ansatzfunktionen für die Verschiebungen grundsätzlich deutlich geringer aus als bei Verwendung linearer Ansatzfunktionen. Daher sind die Elemente Q4Q4 und T3T3 für Strukturanalysen nur bedingt geeignet. Für die Elemente Q9Q4 und Q9Q9 bzw. T6T3 und T6T6 hingegen ist die Spannungsamplitude nahezu identisch. Der numerische Aufwand ist jedoch bei

Verwendung quadratischer Ansatzfunktionen für die Verschiebungen und linearer Ansatzfunktionen für die nichtlokalen Verzerrungen deutlich geringer, da das zu lösende Gleichungssystem wesentlich weniger Unbekannte enthält. Im Folgenden wird deshalb ausschließlich das Element Q9Q4 verwendet.

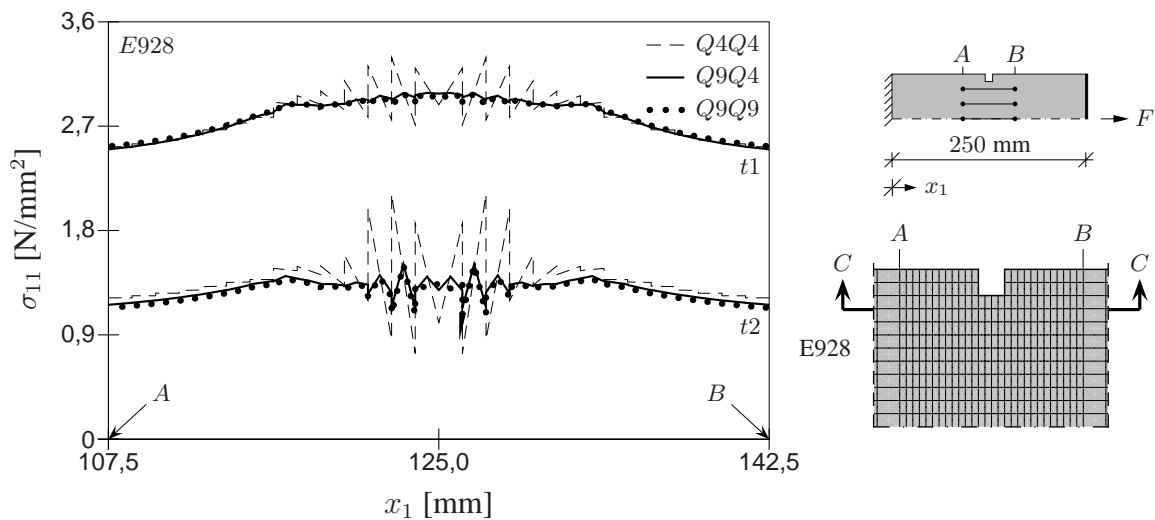


Bild 8.12: Verlauf der Spannung  $\sigma_{11}$  im Schnitt C–C

Mit dem entwickelten Materialmodell gelingt qualitativ und quantitativ eine gute Anpassung der Ergebnisse von Simulation und Experiment. Sowohl der Abfall der Anfangssteifigkeit als auch die irreversiblen Verformungen sind, wie Bild 8.13 anhand des Verformungsverhaltens verdeutlicht, adäquat erfasst.

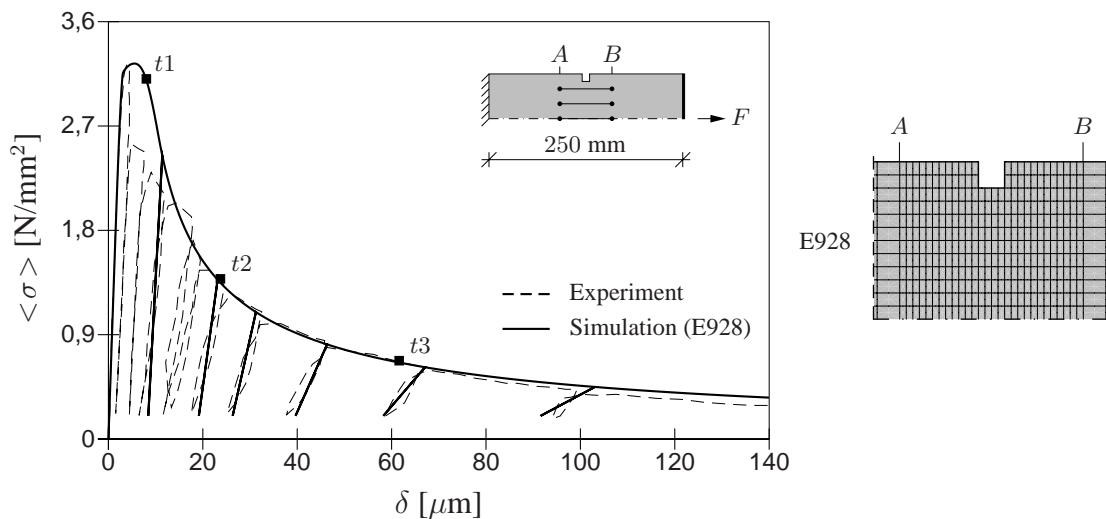


Bild 8.13: Spannung über Verschiebungsdifferenz

Bild 8.14 stellt die Verformung des Prüfkörpers zu unterschiedlichen Zeitpunkten  $t$  in 350-facher Überhöhung dar. Dabei bedingen Rissbildung und -wachstum eine Lokalisierung der Verformungen in den beiden mittleren Elementreihen. Zugleich nimmt in diesem Bereich die Schädigung deutlich zu, was zu einem Abfall der Anfangssteifigkeit

orthogonal zum Riss führt. Bild 8.15 zeigt die räumliche Verteilung der Komponente  $D_{c_{1111}}$  des Schädigungstensors  $D_c$ , die maßgeblich den Steifigkeitsabfall beeinflusst. Im Gegensatz zu lokalen Materialmodellen weist die Lokalisierungszone hier eine endliche Breite auf.

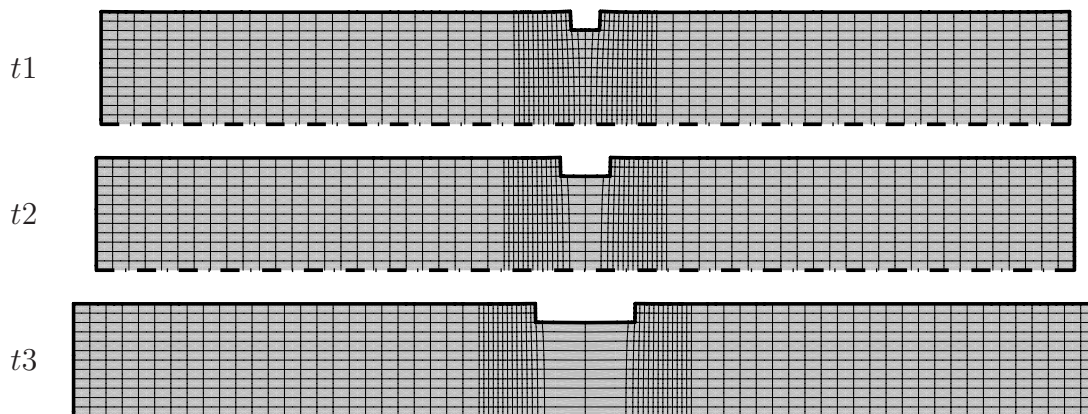


Bild 8.14: Verformungsentwicklung der Struktur

Bereits vor Erreichen der Traglast entstehen im Bereich der Kerben erste Risse. Diese wachsen mit zunehmender Beanspruchung von den beiden Kerben aus symmetrisch zusammen. Im Experiment hingegen erfolgt das Risswachstum aufgrund der heterogenen Materialstruktur von Beton asymmetrisch. Diese Diskrepanz der Systemantworten kann z. B. durch Vorgabe einer Imperfektion, wie das Herabsetzen der Anfangsfließspannung an einer Kerbe, beseitigt werden [114].

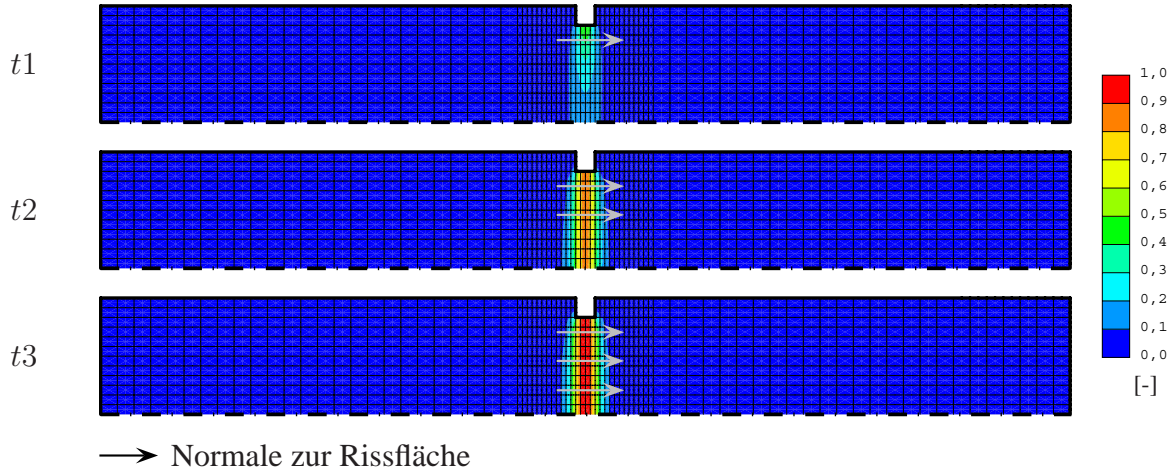
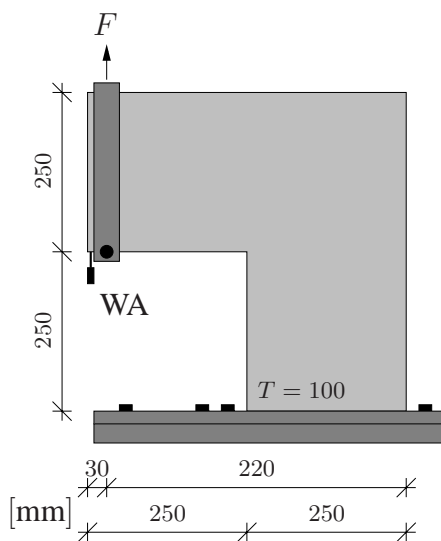


Bild 8.15: Räumliche Verteilung der Schädigung  $D_{c_{1111}}$

Nach dem Zusammenwachsen der Risse nimmt die Schädigung in der Lokalisierungszone gleichmäßig zu, wie in Bild 8.15 zu erkennen. Die in der numerischen Simulation ermittelte Schädigungsverteilung erfasst die experimentell zu beobachtende Versagensform gut. Demnach ist das entwickelte Materialmodell in der Lage, sowohl das Verformungsverhalten als auch das für Beton unter Zugbeanspruchung typische Versagen in Form eines Trennbruchs adäquat zu beschreiben.

## 8.4 L-förmige Scheibe

Die L-förmige Scheibe ist ein häufig verwendetes Testbeispiel für Strukturanalysen [37, 80, 83, 159], da im Gegensatz zum direkten Zugversuch kein reiner Trennbruch, sondern ein kombiniertes Zug-Schub-Versagen eintritt. Die hier zugrunde gelegten Versuchsergebnisse für die aus Normalbeton bestehende Scheibe sind der Arbeit von Winkler [159] entnommen. Um die Aussagekraft der Versuchsergebnisse zu gewährleisten, führt Winkler das Experiment an drei identischen Scheiben durch. Die beiden Schenkel einer Scheibe weisen jeweils eine Länge von 500 mm, eine Breite von 250 mm sowie eine Dicke von 100 mm auf. Der untere Rand des vertikalen Schenkels ist horizontal und vertikal unverschieblich gelagert. Alle übrigen Ränder obliegen keinen Verformungsbeschränkungen. Die Lasteinleitung erfolgt im Experiment über einen 20 mm dicken Stahlstab, der in einer halbkreisförmigen Aussparung am linken unteren Rand des horizontalen Schenkels eingepasst ist. Zur Charakterisierung des Strukturverhaltens dienen die aufgebrachte Kraft  $F$  und die vertikale Verschiebung  $u_2$  am linken unteren Rand des horizontalen Schenkels, die mit Hilfe eines induktiven Wegaufnehmers (WA) gemessen wird.



$$\begin{aligned}
 E &= 18.000 \text{ N/mm}^2 & l^2 &= 8,75 \text{ mm}^2 \\
 \nu &= 0,18 & a_C &= 4.000 \\
 \rho_P &= 0,00 & H_R &= 300 \text{ N/mm}^2 \\
 & & f_R &= 2,58 \text{ N/mm}^2 \\
 & & \sigma_{FR_0} &= 3,20 \text{ N/mm}^2 \\
 & & a_S &= 325 \\
 & & a_{S_0} &= 0,50 \\
 & & a_D &= 0,11 \\
 & & H_D &= 300 \text{ N/mm}^2 \\
 & & \sigma_{FD_0} &= 27,50 \text{ N/mm}^2
 \end{aligned}$$

Bild 8.16: Systemdaten und Modellparameter

Die Systemdaten und Modellparameter sind in Bild 8.16 angegeben. Der Elastizitätsmodul ist hier im Gegensatz zur Arbeit von Winkler zu  $E = 18.000 \text{ N/mm}^2$  gewählt, da sonst bei elastischem Materialverhalten die Steifigkeit der Struktur überschätzt wird. Oliver et al. [110] führen diese Abweichung auf Messfehler zurück, die aus einer ungewollten Starrkörperrotation des Prüfkörpers resultieren. Ursache hierfür ist der Schlupf in den mechanischen Verbindungen zwischen Prüfmaschine und Prüfkörper.



Die numerische Simulation des Versuchs erfolgt im ebenen Spannungszustand, wobei die Diskretisierung der Struktur mit 5200 Rechteckelementen erfolgt. Die Elemente weisen in der Lokalisierungszone eine Kantenlänge von 5 mm auf. Damit beträgt bei Annahme einer Neigung des Risses von  $35^\circ$  gegenüber der Horizontalen die Breite eines Elements orthogonal zum Riss 6,10 mm. Dieser Wert liegt geringfügig oberhalb der maximal zulässigen Elementbreite  $h_{max} = 5,92$  mm, so dass bei einer feineren Diskretisierung geringe Abweichungen im Strukturverhalten zu erwarten sind. So führt eine Halbierung der Kantenlänge in der Lokalisierungszone zu einer Verringerung der Traglast um etwa 3 %. Da die Breite eines Elements orthogonal zum Riss mit 3,05 mm nun kleiner ist als die maximal zulässige Breite, führt eine weitere Verfeinerung des Elementnetzes zu nahezu identischen Simulationsergebnissen.

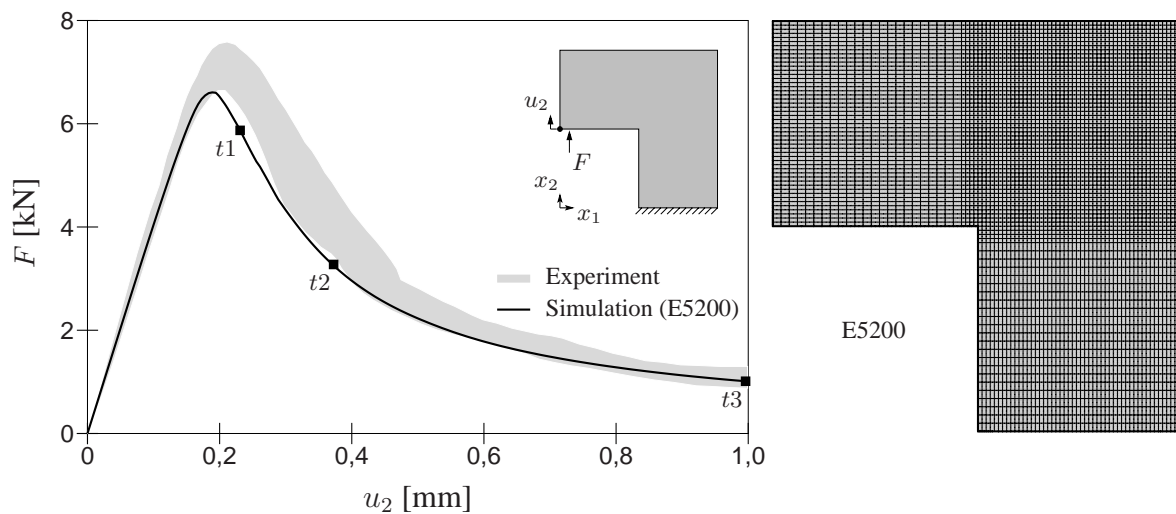


Bild 8.17: Last-Verschiebungs-Kurve

Die Ergebnisse von Simulation und Experiment stimmen, wie Bild 8.17 anhand der Last-Verschiebungs-Kurve zeigt, gut überein. Dabei kennzeichnet der grau unterlegte Bereich das Spektrum der experimentell ermittelten Ergebnisse.

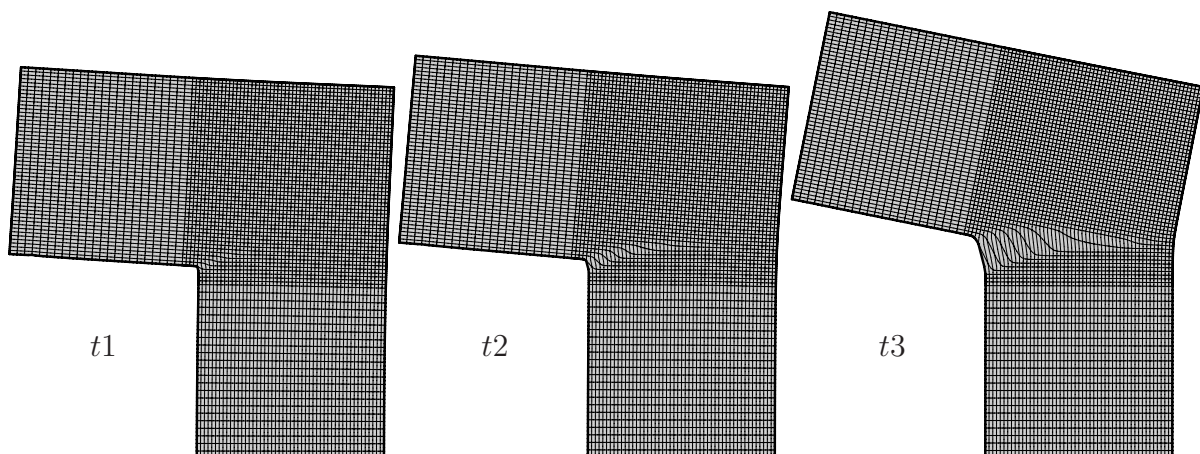


Bild 8.18: Verformungsentwicklung der Struktur



In Bild 8.18 ist die verformte Struktur zu unterschiedlichen Zeitpunkten 100-fach überhöht dargestellt. Die stark verzerrten Elemente im mittleren Bereich der Scheibe repräsentieren den Riss und damit die Zone, in der Schädigung und Verformungen lokalisieren. Die zugehörige Schädigungsverteilung zeigt Bild 8.19.

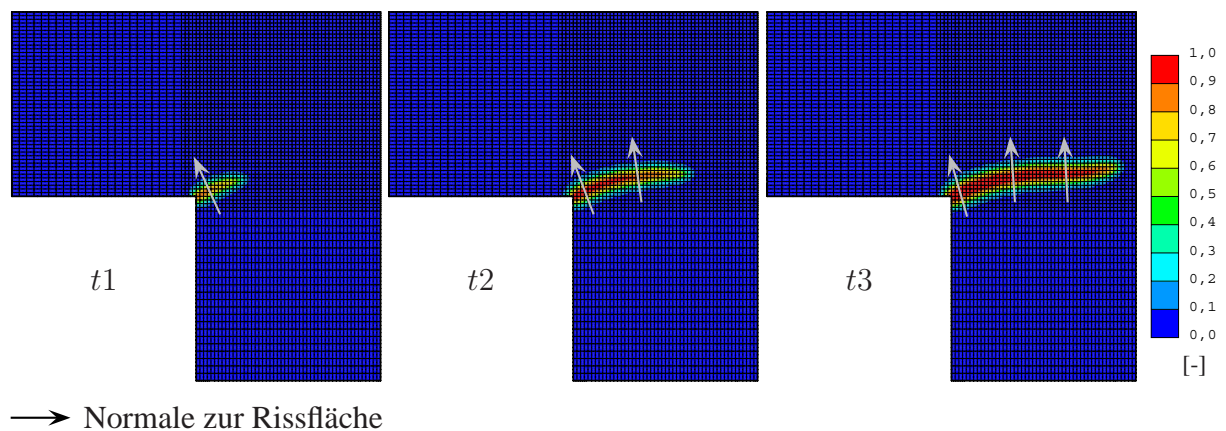


Bild 8.19: Räumliche Verteilung der Schädigung  $D_{C_{1111}}$

Der Riss entsteht an der einspringenden Ecke und verläuft zunächst unter einer Neigung von ca.  $35^\circ$  gegenüber der Horizontalen. Im weiteren Verlauf der Belastung ändert der Riss die Richtung und breitet sich zum rechten Rand hin horizontal aus. Auch hier ist, wie bereits am Beispiel des auf Zug beanspruchten Stabs aufgezeigt, eine Aufweitung der Lokalisierungszone zu erkennen.

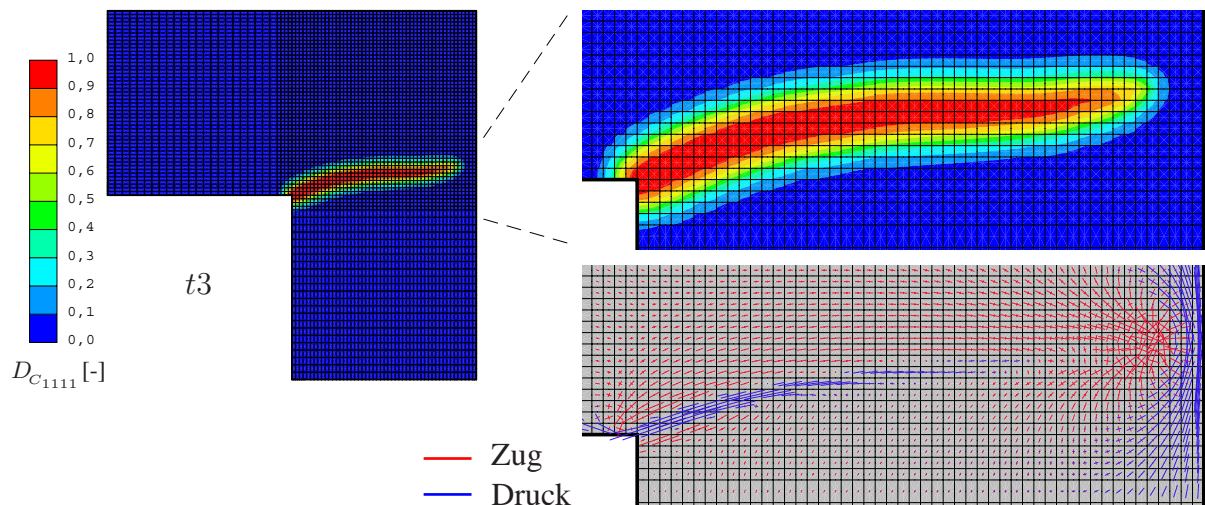


Bild 8.20: Schädigung und Richtung der Hauptspannungen in der Lokalisierungszone

In der Lokalisierungszone entstehen parallel zum Riss Druckspannungen, wie Bild 8.20 anhand der Hauptspannungen verdeutlicht. Unter physikalischen Aspekten ist dies allerdings nur möglich, solange das Material nicht vollständig getrennt ist. Im Bereich großer Schädigung hingegen sind Spannungen physikalisch unmöglich, da dieser Bereich einen makroskopischen Riss repräsentiert. Diesbezüglich bietet eine diskre-

te Beschreibung makroskopischer Risse z. B. mittels der erweiterten Finite-Element-Methode (X-FEM) gegenüber einer kontinuumsmechanischen Beschreibung Vorteile, zumal so auch eine Aufweitung der Lokalisierungszone verhindert würde. Zudem würde bei einer Kombination von kontinuumsmechanischer und diskreter Beschreibung der für Beton typische Versagensprozess wirklichkeitsnah beschrieben, dessen Beginn mit Mikrorissbildung und -wachstum in einem räumlich eng begrenzten Bereich einhergeht. Erst nach dem Zusammenwachsen von Mikrorissen entsteht ein makroskopischer Riss, dessen kontinuumsmechanische Beschreibung lediglich eine Näherung darstellt.

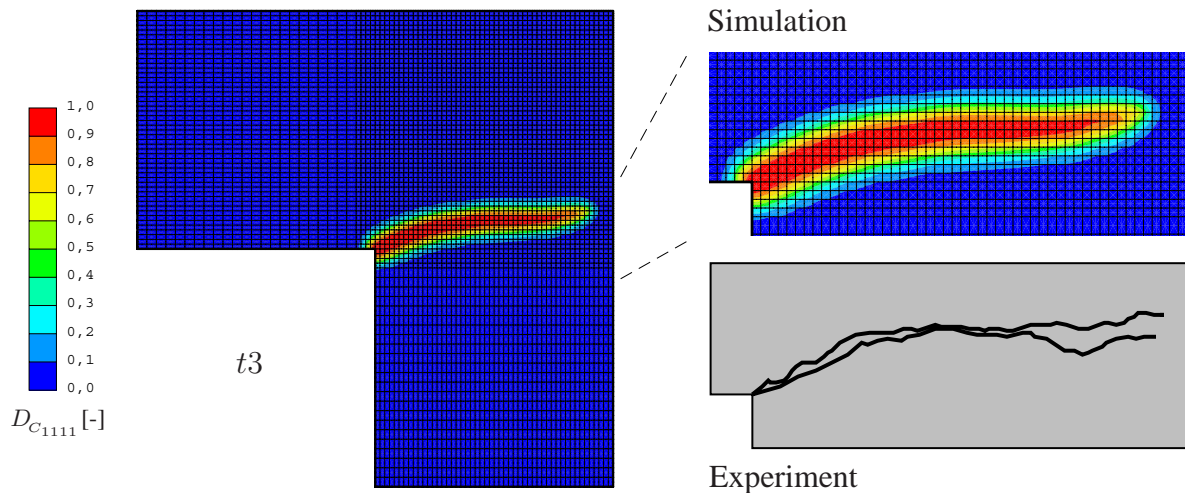


Bild 8.21: Rissverlauf in der Simulation und im Experiment

Der experimentell zu beobachtende Rissverlauf an der Vorder- und Rückseite eines Prüfkörpers ist in Bild 8.21 der Schädigungsverteilung gegenübergestellt. Wie hieraus ersichtlich, gelingt mit dem entwickelten Materialmodell eine gute Approximation der Topologie des Risses.

### Unterschiede zwischen isotroper und anisotroper Schädigungsformulierung

Abschließend werden am Beispiel der L-förmigen Scheibe Unterschiede zwischen einer isotropen und anisotropen Schädigungsformulierung aufgezeigt. Der Vergleich erfolgt mit identischen Modellparametern. Einziger Unterschied ist die Definition des Schädigungstensors  $D_C$ , für den bei isotroper Schädigungsformulierung

$$D_C = D_{C_{1111}} \overset{4}{I} \quad (8.2)$$

gilt. Demnach entspricht der Schädigungstensor dem mit der Schädigung  $D_{C_{1111}}$  skalierten Einheitstensor 4. Stufe. Bild 8.22 zeigt die aus den beiden Schädigungsformulierungen resultierenden Last-Verschiebungs-Kurven, die hier im Gegensatz zum direkten Zugversuch geringe Abweichungen voneinander aufweisen.

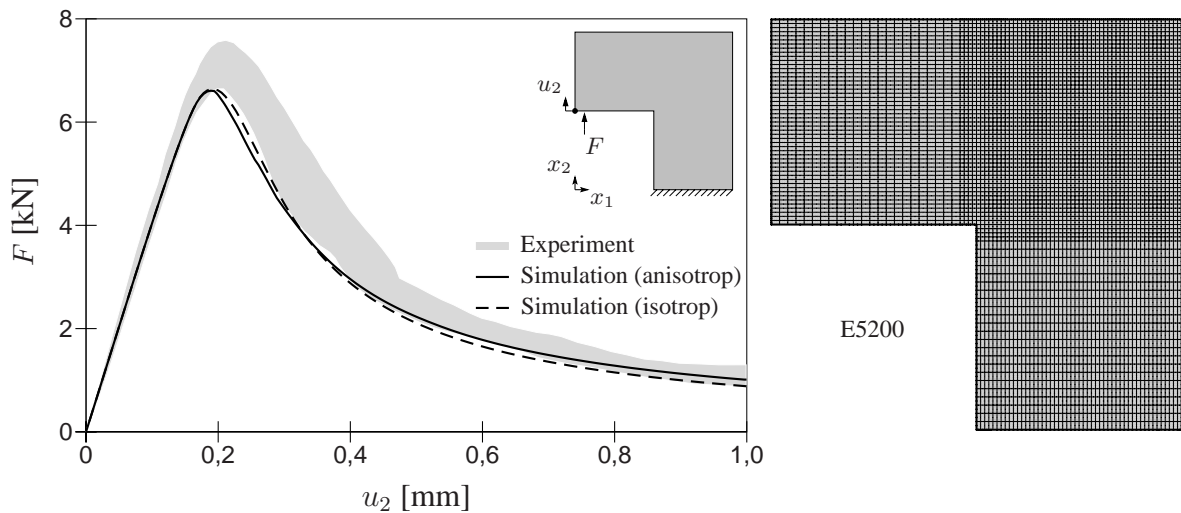


Bild 8.22: Last-Verschiebungs-Kurve bei isotroper und anisotroper Schädigung

Der Riss knickt bei isotroper Schädigungsformulierung, wie Bild 8.23 verdeutlicht, zu einem früheren Zeitpunkt ab, so dass der experimentell zu beobachtende Rissverlauf im Vergleich zur anisotropen Schädigungsformulierung schlechter approximiert ist.

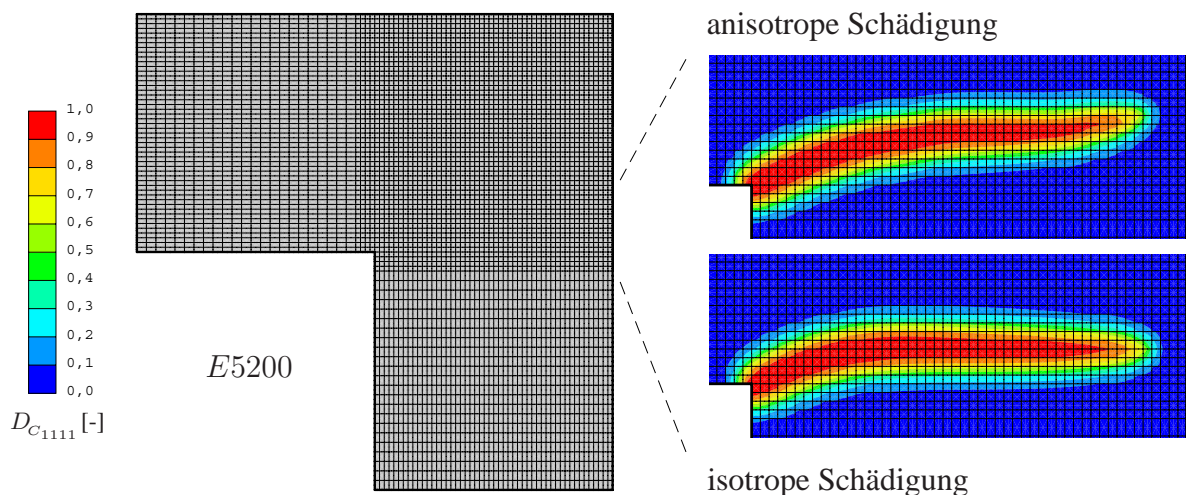


Bild 8.23: Rissverlauf bei isotroper und anisotroper Schädigung

Insgesamt fallen die Unterschiede in den Simulationsergebnissen bei monoton wachsender Beanspruchung jedoch eher gering aus. Erst bei nicht-monoton wachsender Beanspruchung sind deutliche Unterschiede zwischen isotroper und anisotroper Schädigungsformulierung zu erwarten.

## 8.5 Vier-Punkt-Biegeversuch

Als weiteres Beispiel zur Verifizierung des entwickelten Modells dient der Vier-Punkt Biegeversuch. Auch hier tritt wie bei der L-förmigen Scheibe ein kombiniertes Zug-



Schub-Versagen auf. Die Abmessungen des Prüfkörpers, der wie in den vorherigen Versuchen aus Normalbeton besteht, sind entsprechend dem Experiment von Schlangen [130] gewählt. Systemdaten und Modellparameter sind Bild 8.24 zu entnehmen.

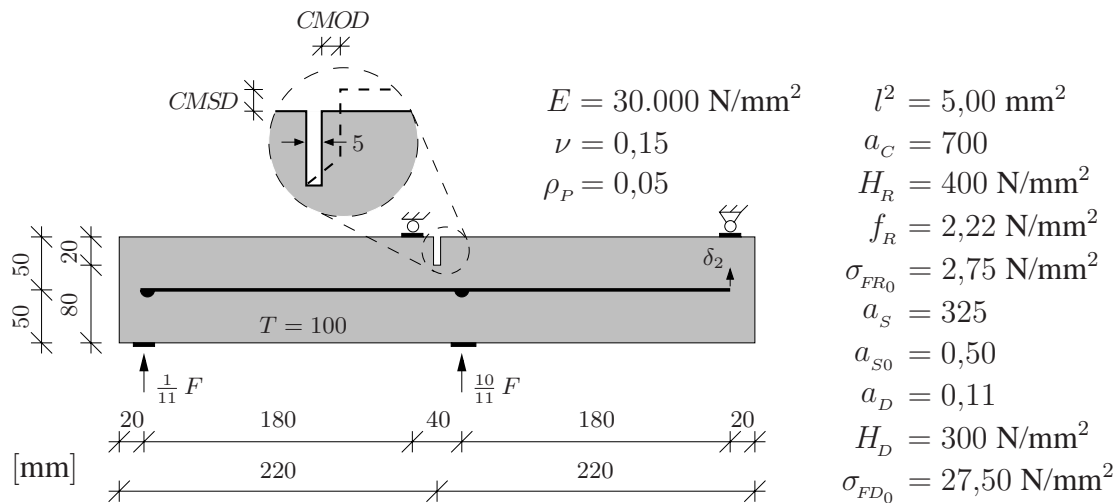
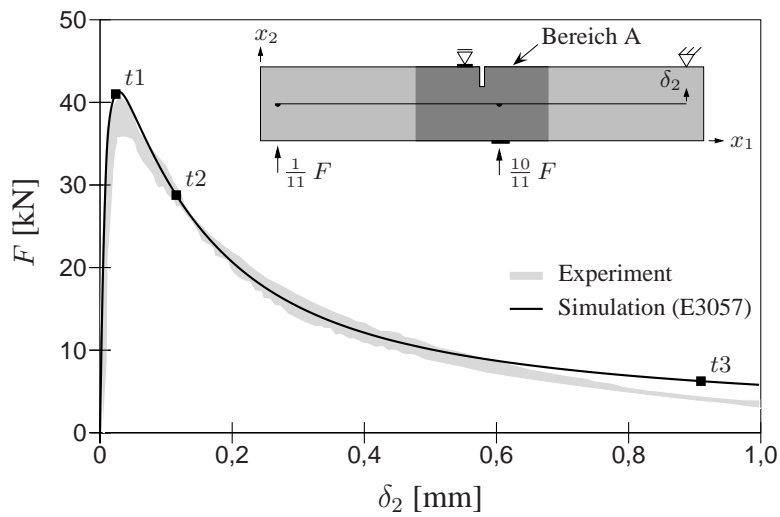


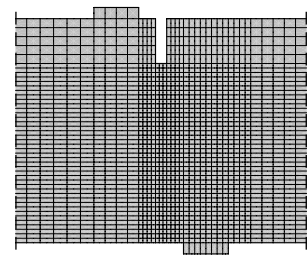
Bild 8.24: Systemdaten und Modellparameter

Für die numerische Simulation des Versuchs sind die beiden 20 mm breiten Lastplatten im mittleren Bereich des Balkens als starre Körper modelliert, indem an der balkenabgewandten Seite der Platten ein linearer Verlauf der vertikalen Verschiebungen erzwungen wird. Die beiden Lastplatten in den äußeren Bereichen des Balkens dagegen haben nur geringen Einfluss auf das Strukturverhalten. Ihr Einfluss wird daher vernachlässigt. Die Lasteinleitung erfolgt über die beiden Lastplatten an der Unterseite des Balkens, wobei das Bogenlängenverfahren die Größe der aktuellen Belastung bestimmt. Der numerischen Simulation liegt ein ebener Spannungszustand zugrunde. Die Diskretisierung des Balkens erfolgt mit 3057 Rechteckelementen, wobei die Elementgröße in der Lokalisierungszone maximal  $2,50 \times 2,00 \text{ mm}^2$  beträgt. Eine feinere Diskretisierung führt zu nahezu identischen Simulationsergebnissen und bestätigt somit die regularisierende Wirkung des entwickelten Materialmodells.

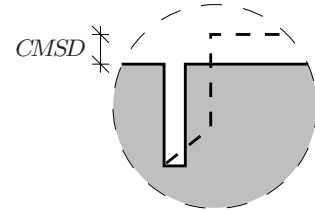
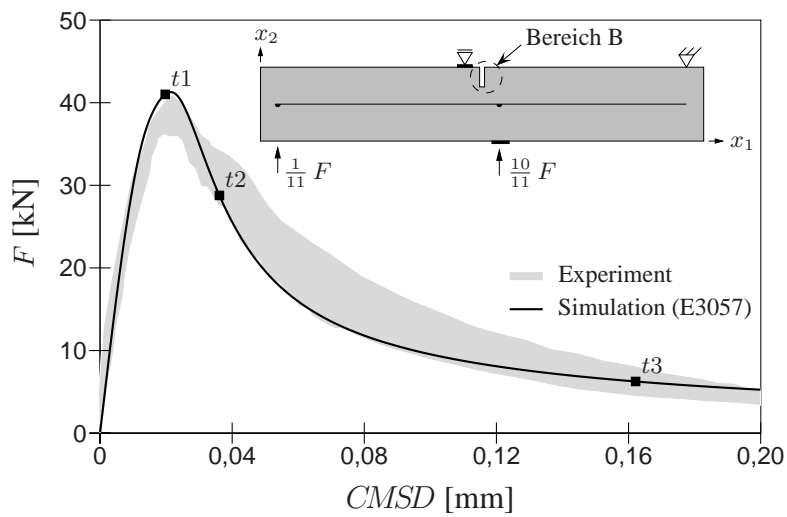
Um das Strukturverhalten möglichst genau zu erfassen, werden Verschiebungen und Verschiebungsdifferenzen an unterschiedlichen Stellen gemessen. So dient neben der aufgebrachten Kraft  $F$  die vertikale Verschiebung  $\delta_2$ , die aus der Verdrehung eines oberhalb der unteren beiden Lastplatten befestigten Stabs resultiert, zur Charakterisierung des Strukturverhaltens. Darüber hinaus werden die gegenseitige vertikale Verschiebung  $CMSD$  und die gegenseitige horizontale Verschiebung  $CMOD$  der oberen Eckpunkte der Kerbe gemessen. Die entsprechenden Last-Verschiebungs-Kurven von Simulation und Experiment sind in Bild 8.25 gegenübergestellt, wobei der grau unterlegte Bereich das Spektrum der experimentell ermittelten Ergebnisse repräsentiert. Insgesamt wird das Strukturverhalten gut approximiert. Erst bei großen Verformungen der Struktur treten Abweichungen zwischen numerisch und experimentell ermittelten Ergebnissen auf.



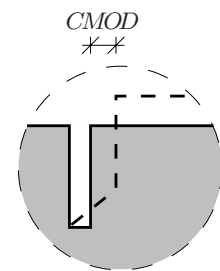
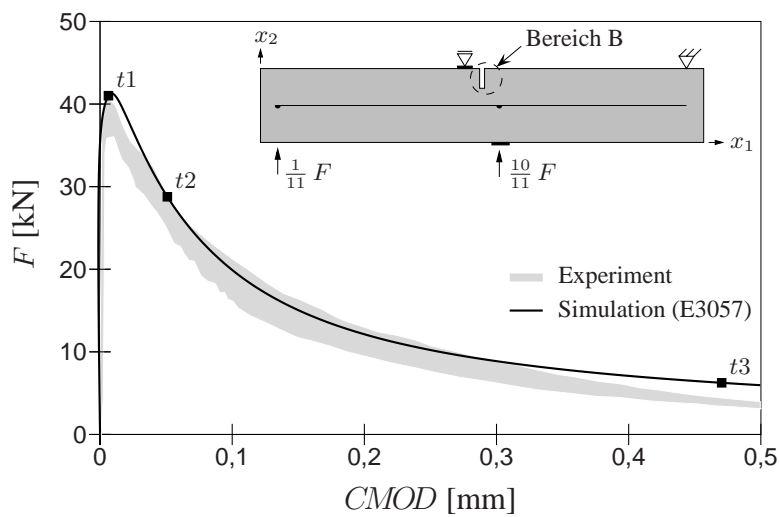
E3057



Bereich A



Bereich B



Bereich B

Bild 8.25: Strukturverhalten beim Vier-Punkt-Biegeversuch

Bild 8.26 zeigt die verformte Struktur zu unterschiedlichen Zeitpunkten 100-fach überhöht. Dabei kennzeichnen stark verzerrte Elemente den Bereich, in dem Verformungen und Schädigung lokalisieren. Die Breite der Lokalisierungszone umfasst hier mehrere Elemente und nicht wie bei klassischen Kontinuumsmodellen nur ein Element.

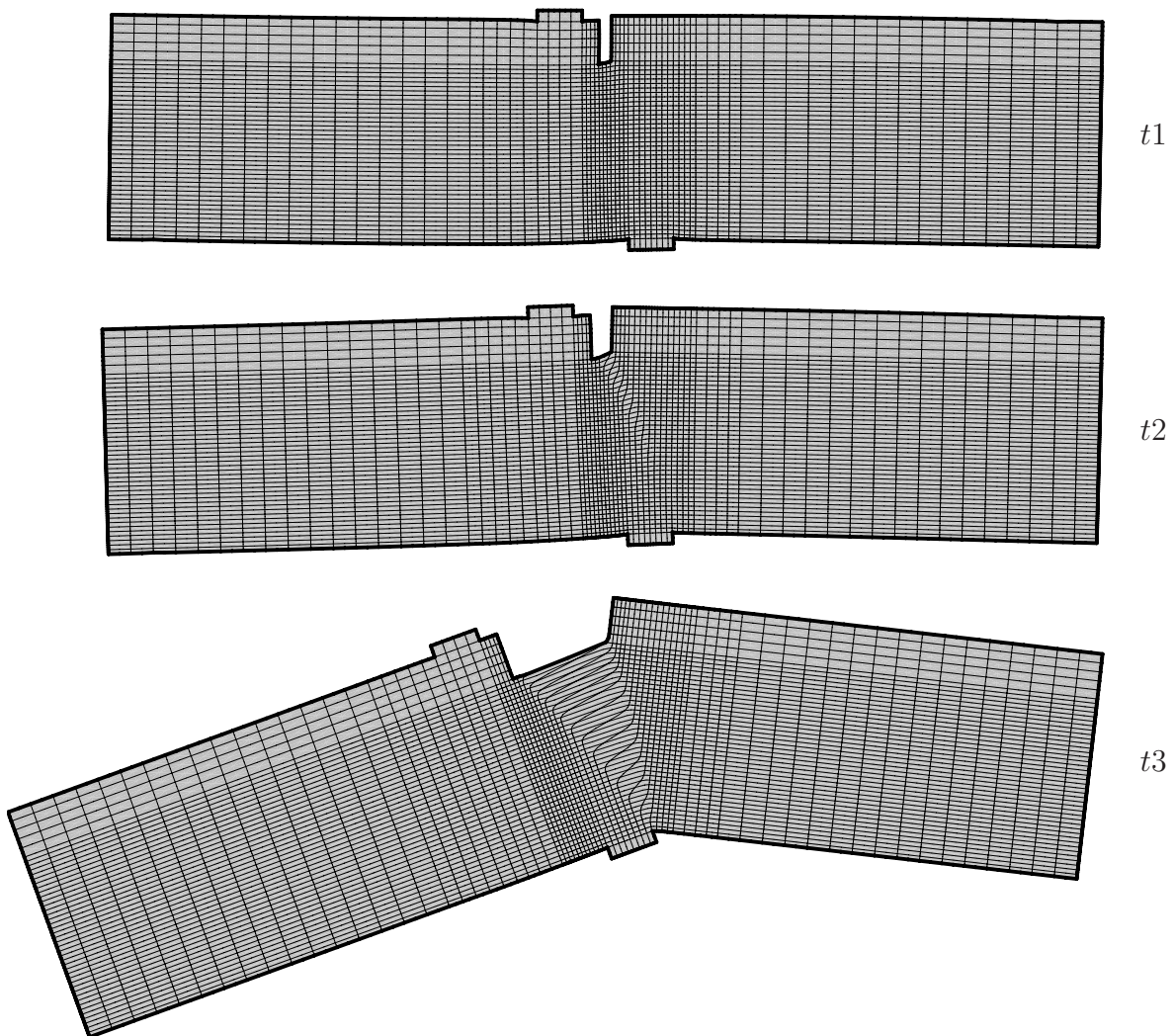


Bild 8.26: Verformungsentwicklung der Struktur

Eine Schädigung des Materials findet zunächst nur an der unteren rechten Ecke der Kerbe statt. Erst im weiteren Verlauf der Belastung wird das Material auch zwischen den beiden Lasteinleitungspunkten am unteren Rand des Balkens geschädigt. In diesem Bereich stagniert die Schädigung jedoch bereits kurz nach deren Initiierung, so dass mit zunehmender Beanspruchung nur noch eine Schädigungszone aktiv ist. In der aktiven Schädigungszone findet allerdings erst nach Überschreiten der Traglast eine signifikante Ausbreitung der Schädigung statt, die ausgehend von der Kerbe zum rechten Rand der gegenüberliegenden Lastplatte wächst. Dabei weist die Schädigungszone eine Krümmung auf, die gegenüber den experimentell zu beobachtenden Rissverläufen weniger ausgeprägt ist, siehe Bild 8.27. Insgesamt wird auch beim Vier-Punkt-Biegeversuch der Versagensprozess vom entwickelten Materialmodell gut beschrieben.

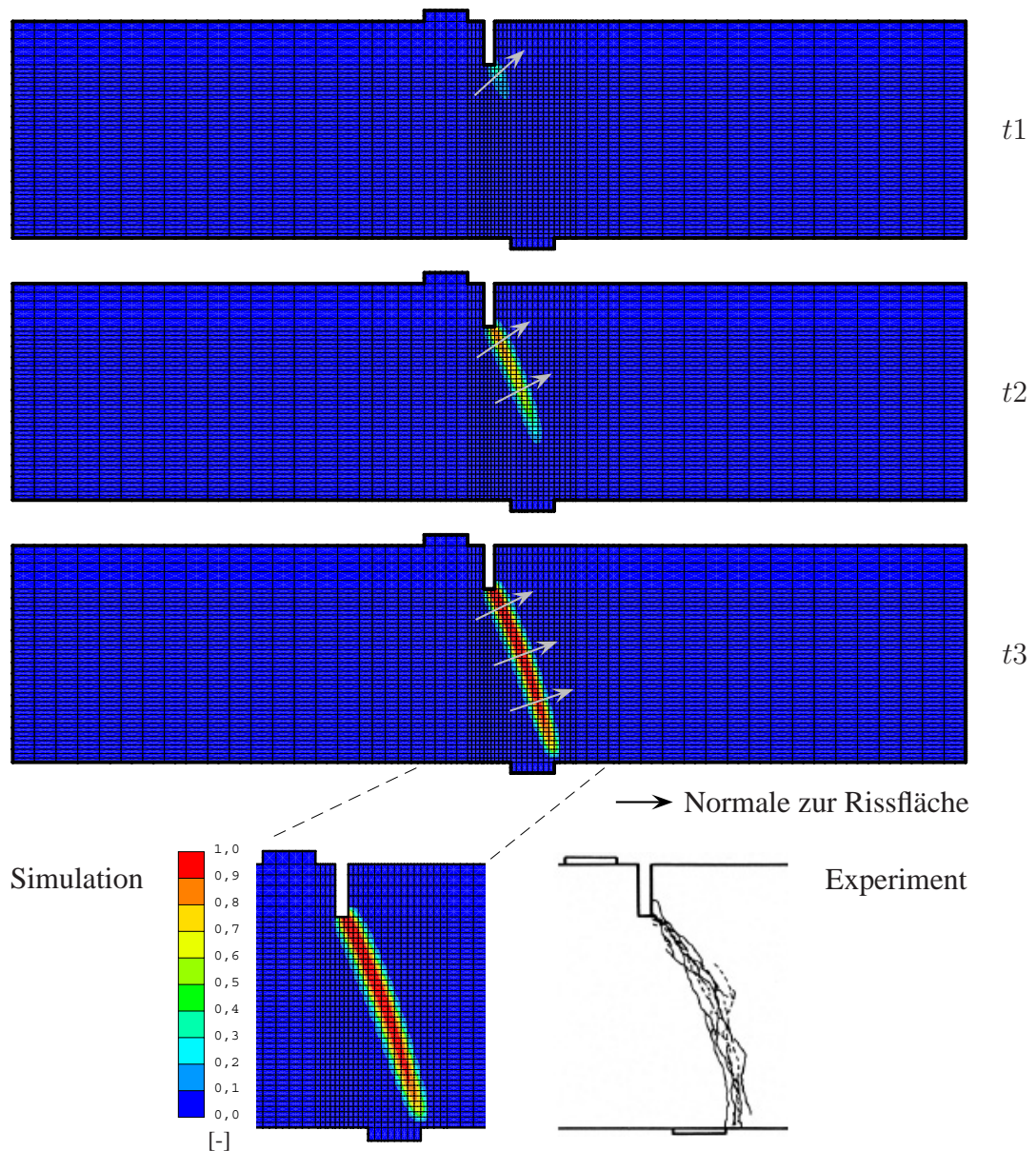


Bild 8.27: Räumliche Verteilung der Schädigung  $D_{C_{1111}}$  - Rissverläufe im Experiment

### Unterschiede zwischen isotroper und anisotroper Schädigungsformulierung

Die Unterschiede zwischen isotroper und anisotroper Schädigungsformulierung fallen hier wie in den vorherigen Beispielen gering aus. Dies gilt sowohl für das Verformungsverhalten als auch für den Rissverlauf. Demnach beschreibt bei monoton wachsender Beanspruchung auch eine isotrope Schädigungsformulierung das Strukturverhalten ausreichend genau. Unter numerischen Aspekten bedingt diese sogar einen geringeren Aufwand, da zur Beschreibung der Schädigungsentwicklung lediglich eine skalare Größe erforderlich ist und nicht wie bei anisotroper Schädigungsformulierung ein Tensor höherer Stufe.



## 8.6 Stützenquerschnitt unter innerer Beanspruchung

Nachfolgend werden die Auswirkungen von Porendruck auf das Verformungsverhalten am Beispiel des Sulfatreibens untersucht. Die numerische Simulation dieses chemisch bedingten Prozesses erfolgt unter Vernachlässigung von Transport- und Reaktionsprozessen, indem die Menge des im Porenraum entstehenden Ettringits unmittelbar vorgegeben wird. Der numerischen Simulation liegt ferner die Annahme zugrunde, dass eine gleichmäßige Porenverteilung im Material vorliegt. Alternativ kann deren Bestimmung auch numerisch durch Simulation des Hydratationsprozesses erfolgen [108].

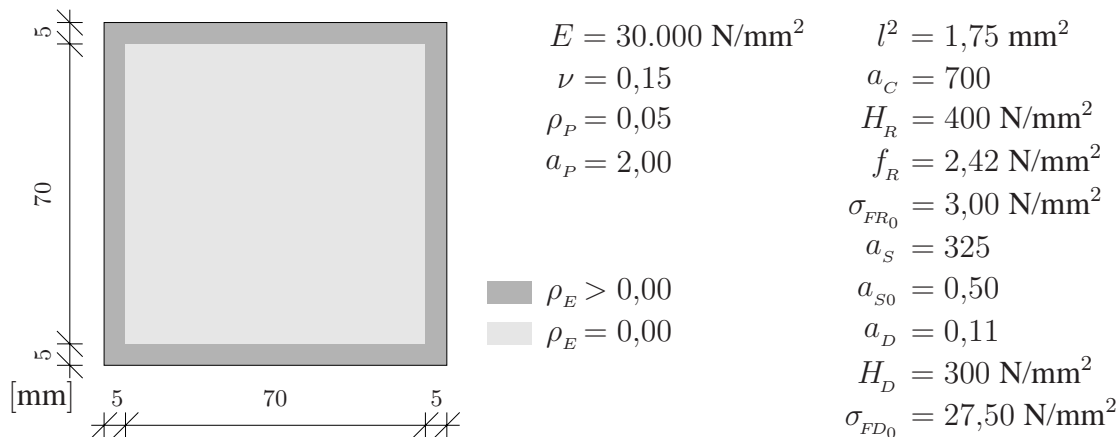


Bild 8.28: Systemdaten und Modellparameter

Zunächst wird ein quadratischer Stützenquerschnitt betrachtet, in dessen äußerer Zone der Volumenanteil  $\rho_E$  des Ettringits sukzessive gesteigert wird. Die numerische Simulation des damit einhergehenden Schädigungsprozesses erfolgt unter Ausnutzung der Symmetrie im ebenen Verzerrungszustand. Die Systemdaten und Modellparameter sind Bild 8.28 zu entnehmen.

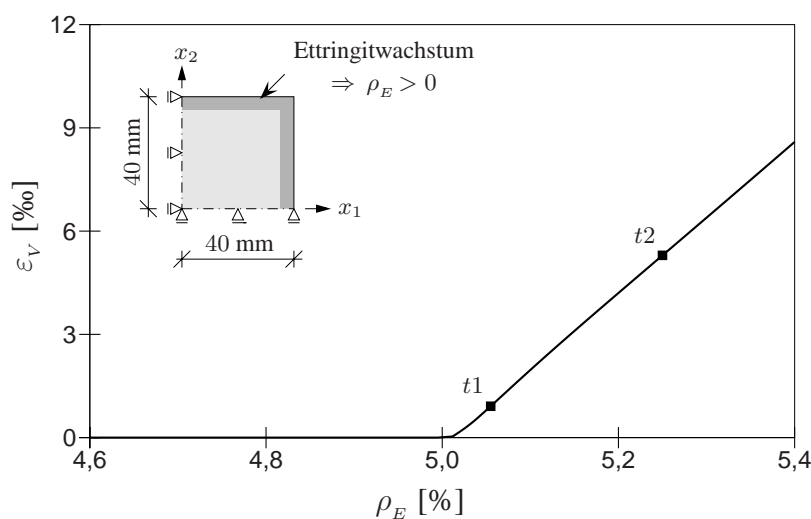


Bild 8.29: Verformungsverhalten des Stützenquerschnitts

Bild 8.29 zeigt das Verformungsverhalten des Stützenquerschnitts, dessen volumetrische Verzerrung  $\varepsilon_v$  im Diagramm über dem Volumenanteil des Ettringits in der äußeren Zone aufgetragen ist. Ist der Volumenanteil des Ettringits größer als der Volumenanteil der Poren nimmt die volumetrische Verzerrung zu. Dies steht im Einklang mit experimentellen Beobachtungen [15, 93].

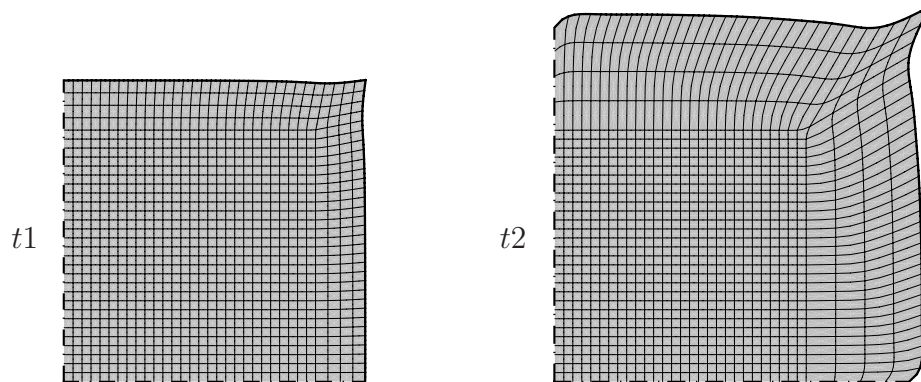


Bild 8.30: Verformungsentwicklung des Stützenquerschnitts

Der verformte Stützenquerschnitt ist in Bild 8.30 zu unterschiedlichen Zeitpunkten 100-fach überhöht dargestellt, wobei die größten Verformungen im Bereich der Ecke entstehen, an der in Experimenten Abplatzungen zu beobachten sind. Die zugehörige räumliche Verteilung des bezogenen Porendrucks  $\sigma_p$  zeigt Bild 8.31.

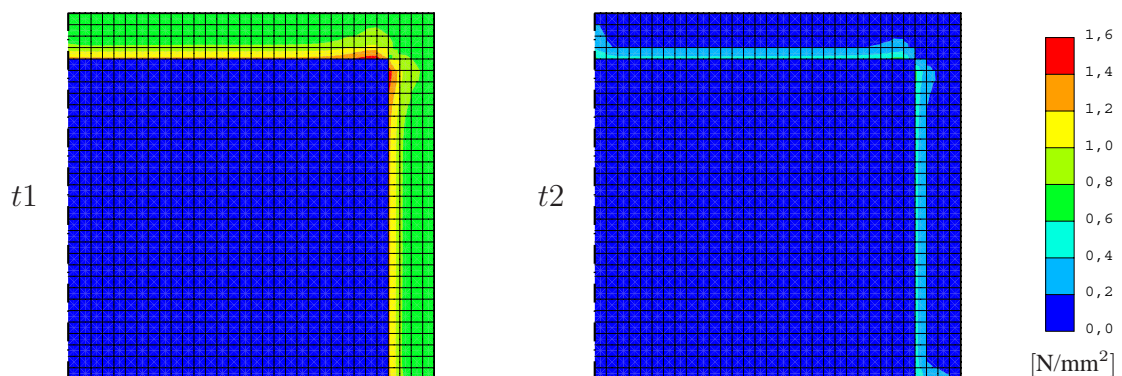


Bild 8.31: Räumliche Verteilung des bezogenen Porendrucks  $\sigma_p$

Sobald das freie Ettringitwachstum in den Poren nicht mehr möglich ist, entsteht Porendruck. Dieser steigt zunächst an und erreicht bereits kurz nach dem Auftreten erster Deformationen den Maximalwert. Danach fällt der Porendruck mit zunehmender Deformation des Stützenquerschnitts deutlich ab. Insofern ist das Verformungsverhalten bei innerer Beanspruchung grundsätzlich dem bei äußerer Belastung identisch. Die zugehörige Schädigungsverteilung ist in Bild 8.32 dargestellt, wobei für die gegebene Beanspruchung aufgrund der angenommenen Homogenität des Materials eine gleichmäßige Schädigungsverteilung in der äußeren Zone des Stützenquerschnitts vorliegt. Die Orientierung der entstehenden Anisotropie entspricht der Normalen zur Rissfläche.

Demzufolge verlaufen die Risse annähernd parallel zur Oberfläche. Dies stimmt mit den aus der Praxis bekannten Schadensbildern sulfatbeanspruchter Bauteile überein, bei denen häufig schalenartige Abplatzungen an der Oberfläche auftreten.

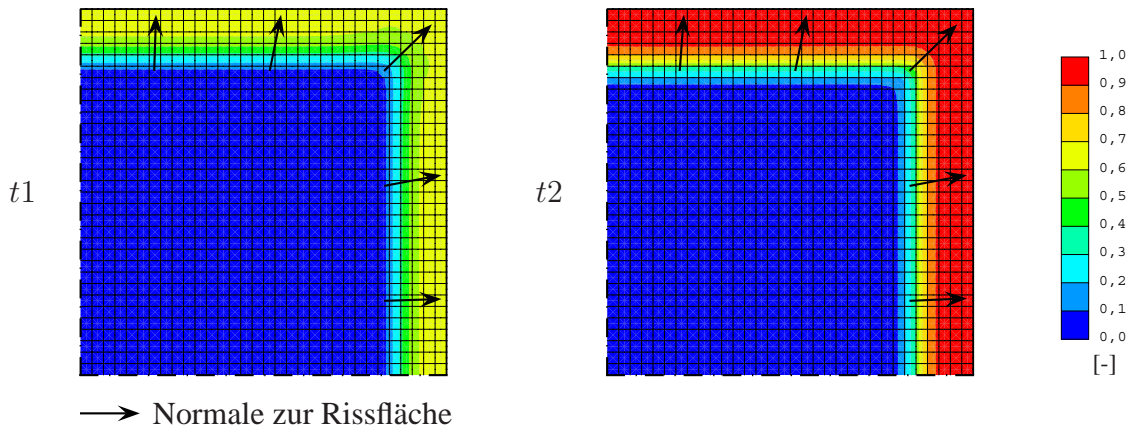


Bild 8.32: Räumliche Verteilung der Schädigung  $D_{C_{1111}}$

## 8.7 Wandquerschnitt unter innerer Beanspruchung

Die Auswirkungen von Porendruck auf das Verformungsverhalten werden abschließend an einem Wandquerschnitt untersucht. Dieser ist am linken und rechten Rand fest eingespannt und am unteren Rand vertikal unverschieblich gelagert. Der obere, sulfatbeanspruchte Rand hingegen obliegt keinen Verformungsbeschränkungen. Für die numerische Simulation des Sulfatreibens wird der Volumenanteil des Ettringits in einer schmalen Zone entlang des oberen Randes sukzessive gesteigert. Dabei erfolgt die numerische Simulation unter Ausnutzung der Symmetrie im ebenen Verzerrungszustand. Die Systemdaten und Modellparameter sind in Bild 8.33 angegeben.

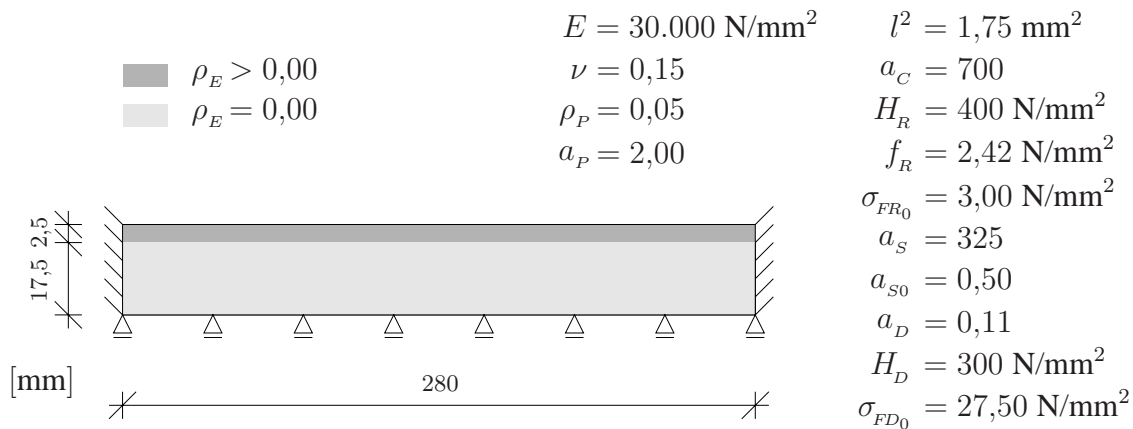


Bild 8.33: Systemdaten und Modellparameter

Bild 8.34 stellt die volumetrische Verzerrung des Wandquerschnitts in Abhängigkeit vom Volumenanteil des Ettringits dar. Das Ettringitwachstum bewirkt einen nahezu linearen Anstieg der volumetrischen Verzerrung, sobald das ungehinderte Wachstum der Ettringitkristalle in den Poren nicht mehr möglich ist.

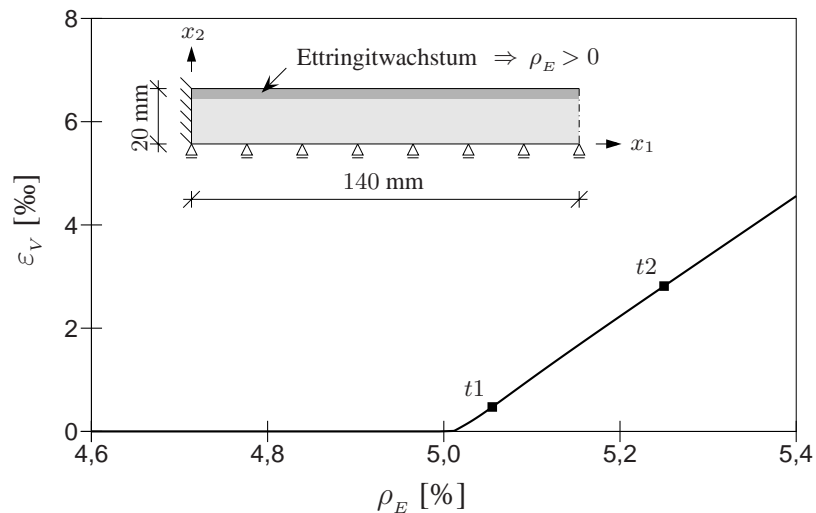


Bild 8.34: Verformungsverhalten des Wandquerschnitts

Bild 8.35 verdeutlicht die Verformungsentwicklung, wobei die Verformungen des Wandquerschnitts 200-fach überhöht dargestellt sind. Die vertikalen Verschiebungen des oberen Randes, die über weite Bereiche konstant sind, fallen erst im Bereich der Einspannung deutlich ab und sind unmittelbar auf dem linken Rand identisch null. Zudem findet am oberen Rand eine Lokalisierung der Verformungen und der Schädigung statt, wie anhand der stark verzerrten Elemente zu erkennen.

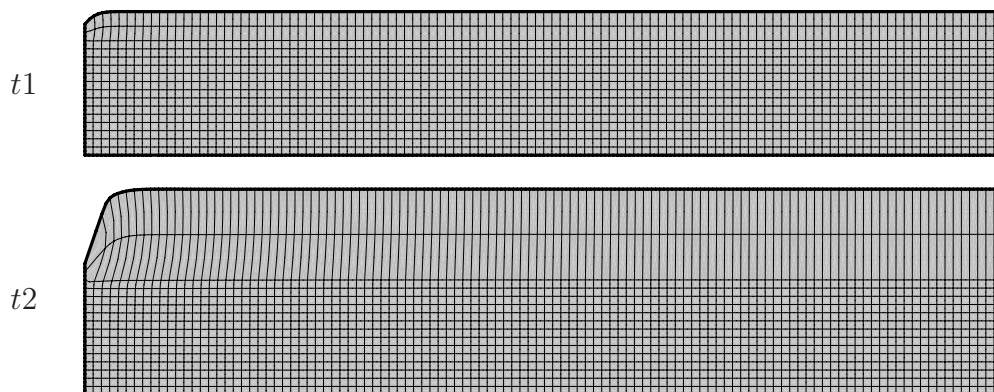


Bild 8.35: Verformungsentwicklung des Wandquerschnitts

Die räumliche Verteilung der Schädigung  $D_{C_{1111}}$  ist in Bild 8.36 dargestellt. Dabei liegt eine weitgehend gleichmäßige Verteilung der Schädigung in der reaktiven Zone vor. Lediglich im Bereich der Einspannung fällt die Schädigung geringer aus. Die aus der numerischen Simulation resultierende Schädigungsverteilung und -orientierung erfasst

auch hier die bei sulfatbeanspruchten Bauteilen zu beobachtenden Schäden in Form oberflächennaher Abplatzungen gut.

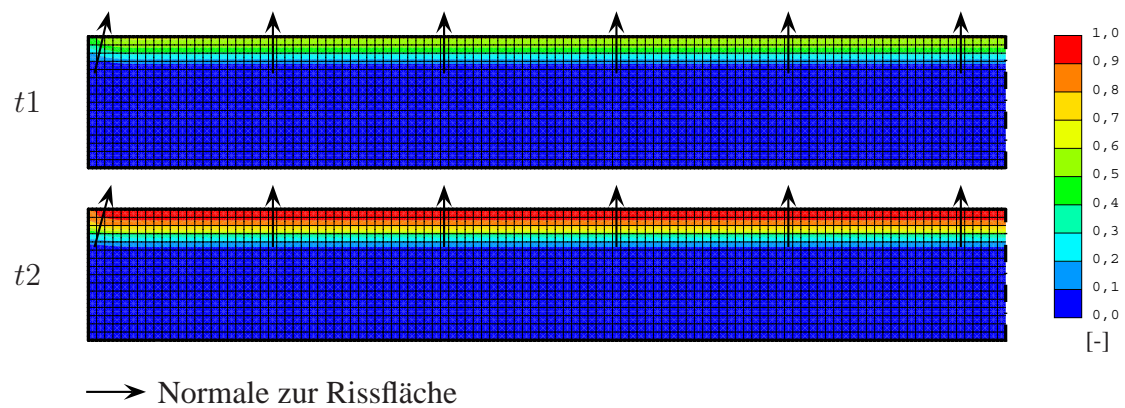


Bild 8.36: Räumliche Verteilung der Schädigung  $D_{C_{1111}}$

### Anmerkung

Das entwickelte Materialmodell gestattet es, innere Beanspruchungen sowohl über den Porendruck als auch über das Volumen der im Materialgefüge entstehenden Reaktionsprodukte zu beschreiben. Letzterer Ansatz ermöglicht die Simulation von Schädigungsprozessen, deren Ursache Phasenneubildungen im Materialgefüge sind. Hierzu zählt das Sulfatreiben. Beim Sulfatreiben führt das Wachstum von Ettringitkristallen im Porenraum zu einer Schädigung des Materials. Die entstehende Ettringitmenge und damit auch das Volumen des Ettringits resultieren aus einer Reaktionsgleichung. Zusammen mit dem entwickelten Materialmodell und einem geeigneten Transportmodell ist dann eine wirklichkeitsnahe Beschreibung des Sulfatreibens möglich.



## 9 Zusammenfassung

Ein Materialmodell für Beton wird vorgestellt, welches das Verformungsverhalten unter äußerer Belastung und Porendruck beschreibt. Dabei berücksichtigt das Modell isotrope und anisotrope Schädigung ebenso wie die damit einhergehenden irreversiblen Verformungen des Materials.

Zunächst werden die Auswirkungen anisotroper Schädigung infolge von Rissbildung und -wachstum auf das elastische Verformungsverhalten mit Hilfe eines mikromechanischen Modells an einem repräsentativen Volumenelement (RVE) untersucht. Die Ergebnisse der mikromechanischen Untersuchung fließen schließlich in ein makromechanisches Modell ein, das für die Strukturanalyse eingesetzt wird. Im RVE erfolgt eine vereinfachte Beschreibung der Betonstruktur. Dies ermöglicht, den Einfluss einer Pore bzw. eines Risses auf das elastische Verformungsverhalten systematisch zu untersuchen. Aus der Homogenisierung der idealisierten Materialstruktur folgen die für das makromechanische Modell benötigten Materialkennwerte. In diesem beschreiben Schädigungstensoren den Einfluss der Pore bzw. des Risses auf das elastische Verformungsverhalten. Da die Schädigungstensoren allerdings nur für bestimmte Parameterkonstellationen im RVE berechnet sind, erfolgt eine Approximation des Schädigungsverlaufs mit Hilfe der Fehlerquadratmethode. Der Schädigungsverlauf hängt von der Porosität und der bezogenen Risslänge ab, so dass diese beiden Variablen den Zusammenhang zwischen mikromechanischen und makromechanischen Modell herstellen.

Im Gegensatz zur diskreten Modellierung des Materials auf Mikroebene erfolgt auf Makroebene die Modellierung verschmiert mittels eines Kontinuumsmodells, das für Strukturanalysen besser geeignet ist. Dabei bildet die Plastizitätstheorie die Modellgrundlage. Zur Beschreibung des Verformungsverhaltens dienen mehrere Fließbedingungen, da die Versagensmechanismen von Beton bei Zug- und Druckbeanspruchung deutliche Unterschiede aufweisen. So charakterisiert eine auf dem Rankine-Kriterium basierende Fließbedingung den Materialzustand unter Zugbeanspruchung und eine Fließbedingung nach Drucker-Prager den Materialzustand unter Druckbeanspruchung. Beide Fließbedingungen sind mit effektiven Spannungen formuliert, um den Einfluss von Porendruck und Schädigung auf das Verformungsverhalten zu erfassen.

Kennzeichnend für das Verformungsverhalten von Beton im Nachbruchbereich ist der Spannungsabfall mit zunehmender Deformation. Dieses Phänomen wird als Entfesti-



gung bezeichnet. Um auch bei entfestigendem Materialverhalten die Unabhängigkeit der Lösung von der Diskretisierung zu gewährleisten, wird in dieser Arbeit eine erweiterte Kontinuums-theorie verwendet, die auf einer impliziten Gradientenformulierung basiert. Für das daraus resultierende nichtlokale Modell gilt das Prinzip der lokalen Wirkung nicht. Dies bedeutet, dass Variablen eines materiellen Punktes nicht wie bei klassischen Kontinuumsmodellen nur den Materialzustand des Punktes, sondern auch den der unmittelbaren Umgebung beeinflussen. Im entwickelten Modell wird die Wirkung der Schädigung als nichtlokal angesehen, wobei deren Entwicklung von den nichtlokalen plastischen Verzerrungen abhängt, die über inhomogene Differentialgleichungen vom Helmholtz-Typ definiert sind. Die numerische Formulierung der daraus resultierenden Mehrfeldaufgabe erfolgt im Rahmen der Finite-Element-Methode mittels einer Weggrößenformulierung.

Anhand ausgewählter Strukturbeispiele wird die Leistungsfähigkeit des entwickelten Materialmodells aufgezeigt. Dabei werden sowohl Auswirkungen äußerer Belastung als auch Auswirkungen innerer Beanspruchung auf das Strukturverhalten untersucht. Neben dem grundsätzlichen Modellverhalten wird der Einfluss unterschiedlicher Elementformulierungen sowie der Unterschied zwischen isotroper und anisotroper Schädigungsformulierung diskutiert. Die Simulationsergebnisse zeigen, dass das entwickelte Materialmodell bei einer hinreichend feinen Diskretisierung der Schädigungszone zu Lösungen führt, die unabhängig von der Diskretisierung sind und zugleich die für die einzelnen Strukturbeispiele typischen Versagensformen korrekt wiedergeben.

# Literatur

- [1] DIN EN 197-1: *Zement - Teil 1: Zusammensetzung, Anforderungen und Konformitätskriterien von Normalzement*. Deutsche Fassung EN 197-1:2000 + A1:2004.
- [2] H. Ahrens & D. Dinkler: *Finite-Element-Methoden Teil I*. Institut für Statik, Braunschweig, 2005.
- [3] J. Altenbach & H. Altenbach: *Einführung in die Kontinuumsmechanik*. Teubner, Stuttgart, 1994.
- [4] B. Y. Bahn & C. T. T. Hsu: *Stress-Strain Behavior of Concrete under Cyclic Loading*. ACI Materials Journal, 95(2), 178–193, 1998.
- [5] F. Bangert, S. Grasberger, D. Kuhl & G. Meschke: *Environmentally Induced Deterioration of Concrete: Physical Motivation and Numerical Modeling*. Engineering Fracture Mechanics, 70(7-8), 891–910, 2003.
- [6] K. J. Bathe: *Finite-Elemente-Methoden*. Springer, Berlin, 2002.
- [7] Z. P. Bažant: *Instability, Ductility and Size Effect in Strain Softening Concrete*. Journal of Engineering Mechanics, 102(2), 331–344, 1976.
- [8] Z. P. Bažant: *Comment on Orthotropic Models for Concrete and Geomaterials*. Journal of Engineering Mechanics, 109(3), 849–865, 1983.
- [9] Z. P. Bažant & T. Belytschko: *Wave Propagation in a Strain-Softening Bar: Exact Solution*. Journal of Engineering Mechanics, 111(3), 381–389, 1985.
- [10] Z. P. Bažant & L. Cedolin: *Blunt Crack Band Propagation in Finite Element Analysis*. Journal of the Engineering Mechanics Division, 105(2), 297–315, 1979.
- [11] Z. P. Bažant & B. H. Oh: *Crack Band Theory for Fracture of Concrete*. Materials and Structures, 16(3), 155–177, 1983.
- [12] Z. P. Bažant & G. Pijaudier-Cabot: *Nonlocal Damage, Localization, Instability and Convergence*. Journal of Applied Mechanics, 55, 287–293, 1988.
- [13] M. A. Biot: *General Theory of Three-Dimensional Consolidation*. Journal of Applied Physics, 12, 155–164, 1941.
- [14] K. Bollmann: *Ettringitbildung in nicht wärmebehandelten Betonen*. Dissertation, Bauhaus-Universität Weimar, 2000.

- [15] P. W. Brown: *An Evaluation of the Sulfate Resistance of Cements in a Controlled Environment*. Cement and Concrete Research, 11, 719–727, 1981.
- [16] H. J. Bunge: *Texture Analysis in Materials Science*. Butterworths, London, 1982.
- [17] A. Burr, F. Hild & F. A. Leckie: *Continuum Description of Damage in Ceramic-Matrix Composites*. European Journal of Mechanics - A/Solids, 16(1), 53–78, 1997.
- [18] H. J. Böhm: *A Short Introduction to Basic Aspects of Continuum Micromechanics*. CDL-FMD-Report 3-1998, TU Wien, 1998.
- [19] J. L. Chaboche: *Le concept de contrainte effective appliqué à l'élasticité et à la viscoplasticité en présence d'un endommagement anisotrope*. In J. P. Boehler, editor, Proceedings of the Euromech Colloquium 115, 737–760, Villard de Lans. Martinus Nijhoff Publishers, The Hague, 1982.
- [20] J. L. Chaboche: *Development of Continuum Damage Mechanics for Elastic Solids Sustaining Anisotropic and Unilateral Damage*. International Journal of Damage Mechanics, 2(4), 311–329, 1993.
- [21] W. F. Chen: *Constitutive Equations for Engineering Materials, Volume 2: Plasticity and Modeling*. Elsevier, Amsterdam, 1994.
- [22] X. F. Chen & C. L. Chow: *On Damage Strain Energy Release Rate  $\dot{Y}$* . International Journal of Damage Mechanics, 4(3), 251–263, 1995.
- [23] B. D. Coleman & M. E. Gurtin: *Thermodynamics with Internal State Variables*. The Journal of Chemical Physics, 47(2), 597–613, 1967.
- [24] R. J. Cope, P. V. Rao, L. A. Clark & P. Norris: *Modelling of Reinforced Concrete Behaviour for Finite Element Analysis of Bridge Slabs*. In C. Taylor, E. Hinton & D. R. J. Oden, editors, Numerical Methods for Nonlinear Problems, 457–470. Pineridge Press, Swansea, 1980.
- [25] J. P. Cordebois & F. Sidoroff: *Damage Induced Elastic Anisotropy*. In J. P. Boehler, editor, Proceedings of the Euromech Colloquium 115, 761–774, Villard de Lans. Martinus Nijhoff Publishers, The Hague, 1982.
- [26] E. Cosserat & F. Cosserat: *Théorie des corps déformables*. A. Hermann et Fils, Paris, 1909.
- [27] M. A. Crisfield: *Non-Linear Finite Element Analysis of Solids and Structures, Volume 2: Advanced Topics*. John Wiley & Sons, New York, 1997.
- [28] R. de Borst: *Simulation of Strain Localization: A Reappraisal of the Cosserat Continuum*. Engineering Computations, 8(4), 317–332, 1991.

- [29] R. de Borst & H. B. Mühlhaus: *Gradient-Dependent Plasticity: Formulation and Algorithmic Aspects*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 35(3), 521–539, 1992.
- [30] R. de Borst & P. Nauta: *Non-Orthogonal Cracks in a Smeared Finite Element Model*. Engineering Computations, 2(3), 35–46, 1985.
- [31] R. de Borst, L. J. Sluys, H. B. Mühlhaus & J. Pamin: *Fundamental Issues in Finite Element Analyses of Localization of Deformation*. Engineering Computations, 10(2), 99–121, 1993.
- [32] J. H. P. de Vree, W. A. M. Brekelmans & M. A. J. van Gils: *Comparison of Non-local Approaches in Continuum Damage Mechanics*. Computers and Structures, 55(4), 581–588, 1995.
- [33] A. Dragon & Z. Mróz: *A Continuum Model for Plastic-Brittle Behaviour of Rock and Concrete*. International Journal of Engineering Science, 17(2), 121–137, 1979.
- [34] R. Dron: *A Discussion of the Papers "Mechanism of Sulphate Expansion" by P. Xie and J. J. Beaudoin*. Cement and Concrete Research, 23(3), 745–746, 1993.
- [35] D. C. Drucker & W. Prager: *Soil Mechanics and Plastic Analysis of Limit Design*. Quarterly of Applied Mathematics, 10(2), 157–165, 1952.
- [36] H. Duda: *Bruchmechanisches Verhalten von Beton unter monotoner und zyklischer Zugbeanspruchung*, Heft 419. Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, Beuth, Berlin, 1991.
- [37] P. Dumstorff: *Modellierung und numerische Simulation von Rissfortschritt in spröden und quasi-spröden Materialien auf Basis der Extended Finite Element Method*. Dissertation, Ruhr-Universität Bochum, 2006.
- [38] G. Duvaut & J. L. Lions: *Les inéquations en mécanique et en physique*. Dunod, Paris, 1972.
- [39] W. Ehlers & W. Volk: *On Shear Band Localization Phenomena of Liquid-Saturated Granular Elastoplastic Porous Solid Materials Accounting for Fluid Viscosity and Micropolar Solid Rotations*. Mechanics of Cohesive-Frictional Materials, 2(4), 301–320, 1997.
- [40] R. A. B. Engelen, M. G. D. Geers & F. P. T. Baaijens: *Nonlocal Implicit Gradient-Enhanced Elasto-Plasticity for the Modelling of Softening Behaviour*. International Journal of Plasticity, 19(4), 403–433, 2003.
- [41] A. C. Eringen & D. G. B. Edelen: *On Nonlocal Elasticity*. International Journal of Engineering Science, 10, 233–248, 1972.

- [42] J. D. Eshelby: *The Determination of the Elastic Field of an Ellipsoidal Inclusion, and Related Problems*. Proceedings of the Royal Society of London. Series A, 241, 376–396, 1957.
- [43] G. Etse: *Theoretische und numerische Untersuchung zum diffusen und lokalisierten Versagen in Beton*. Dissertation, Universität Karlsruhe, 1992.
- [44] P. H. Feenstra & R. de Borst: *A Composite Plasticity Model for Concrete*. International Journal of Solids and Structures, 33(5), 707–730, 1996.
- [45] N. A. Fleck & J. W. Hutchinson: *Strain Gradient Plasticity*. In J. W. Hutchinson & T. Y. Wu, editors, Advances in Applied Mechanics, Volume 33, 295–361. Academic Press, New York, 1997.
- [46] N. A. Fleck & J. W. Hutchinson: *A Reformulation of Strain Gradient Plasticity*. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 49(10), 2245–2271, 2001.
- [47] D. Gawin, C. E. Majorana & B. A. Schrefler: *Numerical Analysis of Hygro-Thermal Behaviour and Damage of Concrete at High Temperature*. Mechanics of Cohesive-Frictional Materials, 4(1), 37–74, 1999.
- [48] D. Gawin, F. Pesavento & B. A. Schrefler: *Modelling of Cementitious Materials Exposed to Isothermal Calcium Leaching, Considering Process Kinetics and Advective Water Flow - Part 1: Theoretical Model - Part 2: Numerical Model*. International Journal of Solids and Structures, 45(25-26), 6221–6268, 2008.
- [49] M. G. D. Geers: *Experimental Analysis and Computational Modelling of Damage and Fracture*. Dissertation, Eindhoven University of Technology, 1997.
- [50] K. Girkmann: *Flächentragwerke*. Springer, Wien, 1959.
- [51] A. Goldman & A. Bentur: *Effects of Pozzolanic and Non-Reactive Microfillers on the Transition Zone in High Strength Concretes*. In J. C. Maso, editor, Interfaces in Cementitious Composites, Proceedings of the International Conference held by RILEM, 53–62, Toulouse. E & FN Spon, London, 1993.
- [52] D. Gross & T. Seelig: *Bruchmechanik mit einer Einführung in die Mikromechanik*. Springer, Berlin, 2001.
- [53] N. R. Hansen & H. L. Schreyer: *A Thermodynamically Consistent Framework for Theories of Elastoplasticity Coupled with Damage*. International Journal of Solids and Structures, 31(3), 359–389, 1994.
- [54] D. R. Hayhurst & F. A. Leckie: *The Effect of Creep Constitutive and Damage Relationships upon the Rupture Time of a Solid Circular Torsion Bar*. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 21(6), 431–446, 1973.



- [55] H. Hencky: *Zur Theorie plastischer Deformationen und der hierdurch im Material hervorgerufenen Nachspannungen*. Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik, 4, 323–334, 1924.
- [56] R. Hill: *The Mathematical Theory of Plasticity*. Clarendon Press, Oxford, 1950.
- [57] R. Hill: *A General Theory of Uniqueness and Stability in Elastic-Plastic Solids*. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 6(3), 236–249, 1958.
- [58] A. Hillerborg, M. Modéer & P. E. Petersson: *Analysis of Crack Formation and Crack Growth in Concrete by Means of Fracture Mechanics and Finite Elements*. Cement and Concrete Research, 6(6), 773–782, 1976.
- [59] G. Hofstetter & H. A. Mang: *Computational Mechanics of Reinforced Concrete Structures*. Vieweg, Braunschweig, 1995.
- [60] A. A. Il'iushin: *On the Postulate of Plasticity*. Journal of Applied Mathematics and Mechanics, 25(3), 746–752, 1961.
- [61] A. R. Ingraffea & V. Saouma: *Numerical Modeling of Discrete Crack Propagation in Reinforced and Plain Concrete*. In G. C. Sih & A. Ditommaso, editors, *Fracture Mechanics of Concrete*, 171–225. Martinus Nijhoff Publishers, Dordrecht, 1985.
- [62] L. Issler, H. Ruoß & P. Häfele: *Festigkeitslehre - Grundlagen*. Springer, Berlin, 1997.
- [63] D. C. Jansen & S. P. Shah: *Effect of Length on Compressive Strain Softening of Concrete*. Journal of Engineering Mechanics, 123(1), 25–35, 1997.
- [64] M. Jirásek: *Numerical Modeling of Deformation and Failure of Materials*. Ph.D.-Course, RWTH Aachen, 1999.
- [65] M. Jirásek: *Comparative Study on Finite Elements with Embedded Cracks*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 188(1-3), 307–330, 2000.
- [66] M. Jirásek & Z. Bažant: *Macroscopic Fracture Characteristics of Random Particle Systems*. International Journal of Fracture, 69(3), 201–228, 1995.
- [67] M. Jirásek & Z. Bažant: *Particle Model for Quasibrittle Fracture and Application to Sea Ice*. Journal of Engineering Mechanics, 121(9), 1016–1025, 1995.
- [68] M. Jirásek & S. Rolshoven: *Comparison of Integral-Type Nonlocal Plasticity Models for Strain-Softening Materials*. International Journal of Engineering Science, 41(13-14), 1553–1602, 2003.
- [69] M. Jirásek & S. Rolshoven: *Regularized Formulations of Strain-Softening Plasticity*. In D. Kolymbas, editor, *Advanced Mathematical and Computational Geomechanics*, 269–299. Springer, Berlin, 2003.

- [70] L. M. Kachanov: *On Creep Rupture Time*. Izvestiya Akademii Nauk SSSR., Otdelenie Tekhnicheskikh Nauk, 8, 26–31, 1958.
- [71] L. M. Kachanov: *Foundations of Fracture Mechanics*. Izvestiya Akademii Nauk SSSR., Otdelenie Tekhnicheskikh Nauk, 1974.
- [72] A. S. Khan & S. Huang: *Continuum Theory of Plasticity*. John Wiley & Sons, New York, 1995.
- [73] D. Knoblauch & U. Schneider: *Bauchemie*. Werner, Düsseldorf, 1995.
- [74] D. Knöfel: *Stichwort Baustoffkorrosion*. Bauverlag, Wiesbaden, 1982.
- [75] W. T. Koiter: *Stress-Strain Relations, Uniqueness and Variational Theorems for Elastic-Plastic Materials with a Singular Yield Surface*. Quarterly of Applied Mathematics, 11, 350–354, 1953.
- [76] D. Krajcinovic & G. U. Fonseka: *The Continuum Damage Theory of Brittle Materials*. Journal of Applied Mechanics, 48, 809–824, 1981.
- [77] E. Kröner: *Berechnung der elastischen Konstanten des Vielkristalls aus den Konstanten des Einkristalls*. Zeitschrift der Physik, 151, 504–518, 1958.
- [78] E. Kröner: *Elasticity Theory of Materials with Long Range Cohesive Forces*. International Journal of Solids and Structures, 3, 731–742, 1967.
- [79] B. Kröplin & D. Dinkler: *Nebenbedingungen - Eine Methode für Systemänderungen ohne Neuberechnung*. In Finite Elemente - Anwendungen in der Baupraxis, 246–257. Ernst & Sohn, 1985.
- [80] E. Kuhl: *Numerische Modelle für kohäsive Reibungsmaterialien*. Dissertation, Universität Stuttgart, 2000.
- [81] H. Kupfer: *Das Verhalten des Betons unter mehrachsiger Kurzzeitbelastung unter besonderer Berücksichtigung der zweiachsigen Beanspruchung*, Heft 229. Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, Ernst & Sohn, Berlin, 1973.
- [82] H. Kupfer, H. K. Hilsdorf & H. Rusch: *Behavior of Concrete under Biaxial Stresses*. ACI Journal, 66(8), 656–666, 1969.
- [83] R. Lackner: *Adaptive Finite Element Analysis of Reinforced Concrete Plates and Shells*. Dissertation, TU Wien, 1999.
- [84] R. Lackner, C. Hellmich & H. A. Mang: *Constitutive Modeling of Cementitious Materials in the Framework of Chemoplasticity*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 53(10), 2357–2388, 2002.
- [85] Y. H. Lee & K. Willam: *Mechanical Properties of Concrete in Uniaxial Compression*. ACI Materials Journal, 94(6), 457–471, 1997.



- [86] J. Lemaitre: *A Continuous Damage Mechanics Model for Ductile Fracture*. Journal of Engineering Materials and Technology, 107(1), 83–89, 1985.
- [87] J. Lemaitre: *A Course on Damage Mechanics*. Springer, Berlin, 1992.
- [88] J. Lemaitre & J. L. Chaboche: *Mechanics of Solid Materials*. Cambridge University Press, Cambridge, 1990.
- [89] T. Liebe & P. Steinmann: *Theory and Numerics of a Thermodynamically Consistent Framework for Geometrically Linear Gradient Plasticity*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 51(12), 1437–1467, 2001.
- [90] F. W. Locher, W. Richartz & S. Sprung: *Erstarren von Zement. Teil I: Reaktion und Gefügeentwicklung*. Zement-Kalk-Gips, 29(10), 435–442, 1976.
- [91] V. A. Lubarda & D. Krajcinovic: *Damage Tensors and the Crack Density Distribution*. International Journal of Solids and Structures, 30(20), 2859–2877, 1993.
- [92] J. Lubliner: *On the Thermodynamic Foundations of Non-Linear Solid Mechanics*. International Journal of Non-Linear Mechanics, 7(3), 237–254, 1972.
- [93] W. Malorny: *Mikrostrukturuntersuchungen zum Sulfatangriff bei Beton*. Dissertation, TU Braunschweig, 1997.
- [94] G. A. Maugin: *The Thermomechanics of Plasticity and Fracture*. Cambridge University Press, Cambridge, 1992.
- [95] J. Mazars & G. Pijaudier-Cabot: *Continuum Damage Theory - Application to Concrete*. Journal of Engineering Mechanics, 115(2), 345–365, 1989.
- [96] P. K. Mehta: *Sulfate Attack on Concrete - A Critical Review*. In J. Skalny, editor, Materials Science of Concrete III, 105–130. American Ceramic Society, Westerville, 1992.
- [97] G. Meschke & S. Grasberger: *Gekoppelte numerische Analysen trocknungs- und lastinduzierter Schädigung von Betonstrukturen*. Beton- und Stahlbetonbau, 98(4), 226–235, 2003.
- [98] G. Meschke, R. Lackner & H. A. Mang: *An Anisotropic Elastoplastic-Damage Model for Plain Concrete*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 42(4), 703–727, 1998.
- [99] D. Min & T. Mingshu: *Formation and Expansion of Ettringite Crystals*. Cement and Concrete Research, 24(1), 119–126, 1994.
- [100] R. D. Mindlin: *Second Gradient of Strain and Surface-Tension in Linear Elasticity*. International Journal of Solids and Structures, 1, 417–438, 1965.

- [101] O. Mohr: *Welche Umstände bedingen die Elastizitätsgrenze und den Bruch eines Materials?* Zeitschrift des Vereins Deutscher Ingenieure, 24(45), 1524–1530, 24(46), 1572–1577, 1900.
- [102] S. Murakami & N. Ohno: *A Continuum Theory of Creep and Creep Damage*. In A. R. S. Ponter & D. R. Hayhurst, editors, *Creep in Structures*, 422–443. Springer, Berlin, 1981.
- [103] H. B. Mühlhaus & E. C. Aifantis: *A Variational Principle for Gradient Plasticity*. International Journal of Solids and Structures, 28(7), 845–857, 1991.
- [104] L. J. M. Nelissen: *Biaxial Testing of Normal Concrete*. Heron, 18(1), 1972.
- [105] S. Nemat-Nasser & M. Hori: *Micromechanics: Overall Properties of Heterogeneous Materials*. North-Holland, Amsterdam, 1999.
- [106] A. M. Neville: *Properties of Concrete*. John Wiley & Sons, New York, 1996.
- [107] D. Ngo & A. C. Scordelis: *Finite Element Analysis of Reinforced Concrete Beams*. ACI Journal, 64(3), 152–163, 1967.
- [108] R. Nothnagel: *Hydratations- und Strukturmodell für Zementstein*. Dissertation, TU Braunschweig, 2007.
- [109] I. Odler & M. Gasser: *Mechanism of Sulfate Expansion in Hydrated Portland Cement*. Journal of the American Ceramic Society, 71(11), 1015–1020, 1988.
- [110] J. Oliver, A. E. Huespe & S. Blanco: *Contribution to WP2/TG2, Test No.1: L-shaped Panel*. <http://nw-ialad.uibk.ac.at/Wp2/Tg2/Se2/Ss1/>.
- [111] N. S. Ottosen: *A Failure Criterion for Concrete*. Journal of the Engineering Mechanics Division, 103(4), 527–535, 1977.
- [112] N. S. Ottosen & K. Runesson: *Properties of Discontinuous Bifurcation Solutions in Elasto-Plasticity*. International Journal of Solids and Structures, 27(4), 401–421, 1991.
- [113] H. Parisch: *Festkörper-Kontinuumsmechanik*. Teubner, Stuttgart, 2003.
- [114] R. H. J. Peerlings: *Enhanced Damage Modelling for Fracture and Fatigue*. Dissertation, Eindhoven University of Technology, 1999.
- [115] R. H. J. Peerlings, R. de Borst, W. A. M. Brekelmans & J. H. P. de Vree: *Gradient Enhanced Damage for Quasi-Brittle Materials*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 39(19), 3391–3403, 1996.
- [116] R. H. J. Peerlings, M. G. D. Geers, R. de Borst & W. A. M. Brekelmans: *A Critical Comparison of Nonlocal and Gradient-Enhanced Softening Continua*. International Journal of Solids and Structures, 38(44-45), 7723–7746, 2001.

- [117] P. Perzyna: *Fundamental Problems in Viscoplasticity*. In Recent Advances in Applied Mechanics, 9, 243–377. Academic Press, New York, 1966.
- [118] S. Popovics: *Strength and Related Properties of Concrete: A Quantitative Approach*. John Wiley & Sons, New York, 1998.
- [119] J. Pravida: *Zur nichtlinearen adaptiven Finite-Element-Analyse von Stahlbetonscheiben*. Dissertation, TU München, 1999.
- [120] I. N. Rabotnov: *On the Equations of State for Creep*. In Progress in Applied Mechanics - The Prager Anniversary Volume, 307–315. MacMillan, New York, 1963.
- [121] W. J. M. Rankine: *A Manual of Applied Mechanics*. C. Griffin & Co., London, 1861.
- [122] H. W. Reinhardt: *Fracture Mechanics of an Elastic Softening Material like Concrete*. Heron, 29(2), 1984.
- [123] H. W. Reinhardt & H. K. Hilsdorf: *Beton-Kalender 2001*, Teil 1. Ernst & Sohn, Berlin, 2001.
- [124] A. Reuss: *Berücksichtigung der elastischen Formänderung in der Plastizitätstheorie*. Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik, 10, 266–274, 1929.
- [125] J. G. Rots: *Computational Modeling of Concrete Fracture*. Dissertation, Delft University of Technology, 1988.
- [126] M. Santhanam, M. D. Cohen & J. Olek: *Mechanism of Sulfate Attack: A Fresh Look - Part I: Summary of Experimental Results*. Cement and Concrete Research, 32(6), 915–921, 2002.
- [127] M. Santhanam, M. D. Cohen & J. Olek: *Mechanism of Sulfate Attack: A Fresh Look - Part II: Proposed Mechanisms*. Cement and Concrete Research, 33(3), 341–346, 2003.
- [128] G. Schickert: *Schwellenwerte beim Betondruckversuch*, Heft 312. Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, Ernst & Sohn, Berlin, 1980.
- [129] P. Schießl: *Skriptum zur Grundvorlesung in Baustoffkunde*. TU München, 2006.
- [130] E. Schlangen: *Experimental and Numerical Analysis of Fracture Processes in Concrete*. Dissertation, Delft University of Technology, 1993.
- [131] D. Schmidt-Döhl: *Ein Modell zur Berechnung von kombinierten chemischen Reaktions- und Transportprozessen und seine Anwendung auf die Korrosion mineralischer Baustoffe*. Dissertation, TU Braunschweig, 1996.

- [132] W. Scholz, H. Knoblauch & W. Hiese: *Baustoffkenntnis*. Werner, Düsseldorf, 1995.
- [133] H. L. Schreyer & M. K. Neilsen: *Analytical and Numerical Tests for Loss of Material Stability*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 39(10), 1721–1736, 1996.
- [134] M. J. Setzer: *Einfluss des Wassergehaltes auf die Eigenschaften des erhärteten Betons*, Heft 280. Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, Ernst & Sohn, Berlin, 1977.
- [135] J. C. Simo & T. J. R. Hughes: *Computational Inelasticity*. Springer, New York, 1998.
- [136] J. C. Simo & J. W. Ju: *Strain- and Stress-Based Continuum Damage Models - Part I: Formulation - Part II: Computational Aspects*. International Journal of Solids and Structures, 23(7), 821–869, 1987.
- [137] A. Simone, H. Askes, R. H. J. Peerlings & L. J. Sluys: *Interpolation Requirements for Implicit Gradient-Enhanced Continuum Damage Models*. Communications in Numerical Methods in Engineering, 19(7), 563–572, 2003.
- [138] A. Simone, H. Askes, R. H. J. Peerlings & L. J. Sluys: *Corrigendum "Interpolation Requirements for Implicit Gradient-Enhanced Continuum Damage Models"*. Communications in Numerical Methods in Engineering, 20(2), 163–165, 2004.
- [139] J. J. Skrzypek & A. Ganczarski: *Modeling of Material Damage and Failure of Structures: Theory and Applications*. Springer, Berlin, 1999.
- [140] F. O. Slate & K. C. Hover: *Microcracking in Concrete*. In A. Carpinteri & A. R. Ingraffea, editors, *Fracture Mechanics of Concrete: Material Characterization and Testing*, 137–159. Martinus Nijhoff Publishers, The Hague, 1984.
- [141] L. J. Sluys: *Wave Propagation, Localization and Dispersion in Softening Solids*. Dissertation, Delft University of Technology, 1992.
- [142] A. Steffens, D. Dinkler & H. Ahrens: *Modeling Carbonation for Corrosion Risk Prediction of Concrete Structures*. Cement and Concrete Research, 32(6), 935–941, 2002.
- [143] E. Stein & F. J. Barthold: *Unterlagen zur Vorlesung Elastizitätstheorie*. Universität Hannover, 2004.
- [144] P. Steinmann & K. J. Willam: *Localization within the Framework of Micropolar Elasto-Plasticity*. In V. Mannl, J. Najár & O. Brüller, editors, *Advances in Continuum Mechanics*, 296–313. Springer, Berlin, 1991.

- [145] G. Strang: *Introduction to Applied Mathematics*. Wellesley-Cambridge Press, Wellesley, 1986.
- [146] T. Streilein: *Erfassung formativer Verfestigung in viskoplastischen Stoffmodellen*. Dissertation, TU Braunschweig, 1997.
- [147] R. A. Toupin: *Elastic Materials with Couple-Stresses*. Archive of Rational Mechanics and Analysis, 11, 385–414, 1962.
- [148] H. E. Tresca: *Mémoire sur l'écoulement des corps solides soumis à de fortes pressions*. Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences, 59, 754–758, 1864.
- [149] C. Truesdell & W. Noll: *The Non-Linear Field Theories of Mechanics*. Springer, New York, 1992.
- [150] J. G. M. van Mier: *Effect of Length on Compressive Strain Softening of Concrete*. Heron, 31(3), 1986.
- [151] R. von Mises: *Mechanik der festen Körper im plastisch-deformablen Zustand*. Nachrichten von der königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-physikalische Klasse, 4, 582–592, 1913.
- [152] R. A. Vonk: *Softening of Concrete Loaded in Compression*. Dissertation, Eindhoven University of Technology, 1992.
- [153] R. A. Vonk: *A Micromechanical Investigation of Softening of Concrete Loaded in Compression*. Heron, 38(3), 1993.
- [154] G. Z. Voyiadjis & T. Park: *Anisotropic Damage for the Characterization of the Onset of Macro-Crack Initiation in Metals*. International Journal of Damage Mechanics, 5(1), 68–92, 1996.
- [155] W. M. Wang, L. J. Sluys & R. de Borst: *Viscoplasticity for Instabilities due to Strain Softening and Strain-Rate Softening*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 40(20), 3839–3864, 1997.
- [156] G. N. Wells: *Discontinuous Modelling of Strain Localisation and Failure*. Dissertation, Delft University of Technology, 2001.
- [157] K. J. Willam: *Experimental and Computational Aspects of Concrete Fracture*. In F. Damjanić, E. Hinton, D. R. J. Owen, N. Bićanić & V. Simović, editors, Proceedings of the 1st International Conference on Computer Aided Analysis and Design of Concrete Structures, 33–70, Split. Pineridge Press, Swansea, 1984.
- [158] K. J. Willam & E. P. Warnke: *Constitutive Model for the Triaxial Behavior of Concrete*. In Colloquium on Concrete Structures Subjected to Triaxial Stresses, Bergamo, 1–30. IABSE, Zürich, 1975.



- [159] B. J. Winkler: *Traglastuntersuchungen von unbewehrten und bewehrten Betonstrukturen auf der Grundlage eines objektiven Werkstoffgesetzes für Beton*. Dissertation, Universität Innsbruck, 2001.
- [160] F. H. Wittmann, P. E. Roelfstra & C. L. Kamp: *Drying of Concrete: An Application of the 3L-Approach*. Nuclear Engineering and Design, 105(2), 185–198, 1988.
- [161] P. Wriggers: *Nichtlineare Finite-Element-Methoden*. Springer, Berlin, 2001.
- [162] P. Xie & J. J. Beaudoin: *Mechanism of Sulphate Expansion I. Thermodynamic Principle of Crystallization Pressure*. Cement and Concrete Research, 22(4), 631–640, 1992.
- [163] P. Xie & J. J. Beaudoin: *Mechanism of Sulphate Expansion II. Validation of Thermodynamic Theory*. Cement and Concrete Research, 22(5), 845–854, 1992.
- [164] P. Xie & J. J. Beaudoin: *A Reply to the Discussion by R. Dron of the Papers "Mechanism of Sulphate Expansion"*. Cement and Concrete Research, 23(3), 747–748, 1993.
- [165] O. C. Zienkiewicz & R. L. Taylor: *The Finite Element Method. Volume 1: The Basis. Volume 2: Solid Mechanics*. Butterworth-Heinemann, Oxford, 2000.
- [166] P. K. Zysset & A. Curnier: *An Implicit Projection Algorithm for Simultaneous Flow of Plasticity and Damage in Standard Generalized Materials*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 39(18), 3065–3082, 1996.
- [167] T. Zümendorf: *Ein gradientenabhängiges Modell für Schädigung bei viskoplastischem Materialverhalten*. Dissertation, TU Braunschweig, 2006.

## Berichte aus dem Institut für Statik ab 1994

- |     |         |   |
|-----|---------|---|
| Nr. | 94-78   | U. KOWALSKY: Mikrophysikalisch begründetes Werkstoffmodell zur Berechnung thermomechanisch beanspruchter Konstruktionen (1994).               |
| Nr. | 95-79   | N. OBERBECK: Instationärer Wärme-Feuchte-Schadstoff - Transport in Beton, Theorie und Berechnung (1995).                                      |
| Nr. | 95-80   | N. MELEKA: Nonlinear Analysis of Flat Slab Floors (1995).   |
| Nr. | 97-81   | H. FLOREN: Strukturanalysen unterirdischer Hohlräume im Salzgebirge mit hybriden Randelement- / Finite-Element-Methoden (1997).               |
| Nr. | 96-82   | T. GARTUNG: Berechnung von Asphaltstraßen mit einem einheitlichen rheologischen Konzept einschließlich Schädigung (1996).                     |
| Nr. | 97-83   | T. STREILEIN: Erfassung formativer Verfestigung in viskoplastischen Stoffmodellen (1997).   |
| Nr. | 97-84   | B. GUERICKE: Geomechanische Untersuchungen zur Sicherheitsanalyse von Deponien im Salzgestein (1997).   |
| Nr. | 97-85   | U. GLABISCH: Stoffmodell für Grenzzustände im Salzgestein zur Berechnung von Gebirgshohlräumen (1997).  |
| Nr. | 97-86   | E. ELARABI: Numerical Analysis of the Swelling Soil Effects on Structures (1997).   |
| Nr. | 98-87   | I. SPOHR: Störenergie-Konzept für den elasto-plastischen Beulsicherheitsnachweis beliebig belasteter Zylinderschalen (1998).                  |
| Nr. | 99-88   | C.-X. HUANG: Berechnung von Temperaturspannungen und Rißbildungen infolge Hydratation in 3D-Betonkonstruktionen (1999).                       |
| Nr. | 2000-89 | H. PENSKY: Beschreibung von streuendem Materialverhalten und von Schädigung bei inelastischen Werkstoffen (2000).                             |
| Nr. | 2000-90 | A. STEFFENS: Modellierung von Karbonatisierung und Chloridbindung zur numerischen Analyse der Korrosionsgefährdung der Betonbewehrung (2000). |
| Nr. | 2001-91 | J. EBERS-ERNST: Modellierung des inelastischen Verformungsverhaltens von Siedlungsabfalldeponien (2001).                                      |
| Nr. | 2001-92 | J. HANEL: Modell zur Analyse von gekoppelten Transport- und Stoffabbauprozessen in Deponien (2001).   |
| Nr. | 2002-93 | B. WIEDEMANN: Modelle für vorgespannte Membranen mit Faltenbildung (2002).  |
| Nr. | 2002-94 | R. TACKE: Feuchte- und Festigkeitsentwicklung hydratisierenden Betons – Modellierung und numerische Analyse (2002).                           |
| Nr. | 2002-95 | E. WALHORN: Ein simultanes Berechnungsverfahren für Fluid-Struktur-Wechselwirkungen mit finiten Raum-Zeit-Elementen (2002).                   |



- |     |          |   |
|-----|----------|---|
| Nr. | 2003-96  | B. HÜBNER: Simultane Analyse von Bauwerk-Wind-Wechselwirkungen (2003).  |
| Nr. | 2003-97  | J. GEISTEFELDT: Stochastische Finite-Element-Methoden mit Anwendung auf aeroelastische Tragsysteme (2003).                              |
| Nr. | 2003-98  | O. KNOKE: Beulwiderstände zusammengesetzter Zylinder-Kegel-Schalen (2003).  |
| Nr. | 2005-99  | A. KÖLKE: Modellierung und Diskretisierung bewegter Diskontinuitäten in randgekoppelten Mehrfeldsystemen (2005).                        |
| Nr. | 2006-100 | D. DINKLER (HRSG.): Institut für Statik, Forschung und Lehre, 1996-2006 (2006).   |
| Nr. | 2006-101 | A. VEHRE: Ein Reduktionsverfahren für Fluid-Struktur-Wechselwirkungen mit finiten Raum-Zeit-Elementen (2006).                           |
| Nr. | 2006-102 | M. LÖHR: Analyse aeroelastischer Systeme mit Spektralen Stochastischen Finite-Element-Methoden (2006).                                  |
| Nr. | 2006-103 | L. ASCHENBRENNER: Mehrkomponenten-Modell zur Beschreibung des Deformationsverhaltens von Asphalt (2006).                                |
| Nr. | 2006-104 | T. ZÜMENDORF: Ein gradientenabhängiges Materialmodell für duktile und zeitabhängige Schädigung (2006).                                  |
| Nr. | 2007-105 | C. LEPPERT: Mehrphasenmodell für granulare Medien zur numerischen Untersuchung des Phasenübergangs bei der Entleerung von Silos (2007). |
| Nr. | 2008-106 | V. KRASE: Stability of Municipal Solid Waste Landfills (2008).  |
| Nr. | 2009-107 | J. PONTOW: Imperfektionsempfindlichkeit und Grenzlaster von Schalentragwerken (2009).   |

## **Sonderdrucke**

Phänomenologische Modelle für Werkstoffe des Bauwesens.

Hermann Ahrens zum 60. Geburtstag (1998).

Herausgeber: D. Dinkler, U. Kowalsky.

Baustatik-Baupraxis 8.

Berichte der Fachtagung am 21. und 22. März 2002 in Braunschweig.

Herausgeber: D. Dinkler.

Institut für Statik, Technische Universität Braunschweig

Beethovenstraße 51, 38106 Braunschweig, Deutschland

Telefon +49 (0)531 / 391-3667, Telefax +49 (0)531 / 391-8116

E-Mail [statik@tu-bs.de](mailto:statik@tu-bs.de), Homepage <http://www.statik.tu-bs.de>